الفصل التاسع

جزء من التوزيعات

التوزيع الطبيعي

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتماليه في علم الاحصاء لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العمليه مثل الأطوال و الأوزان و الأعمارودرجات الحراره والدخول الشهريه ... و غيرها من الظواهر المتصلة .

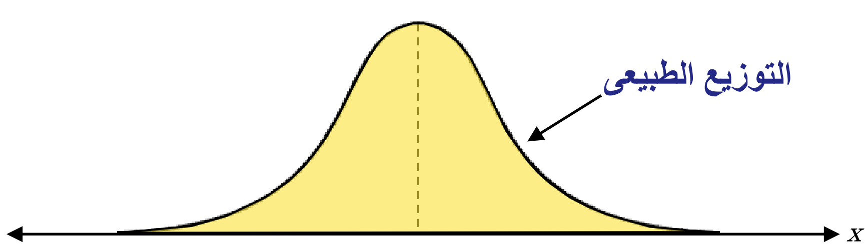
ولرسم التوزيع الطبيعى نستخدم المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي

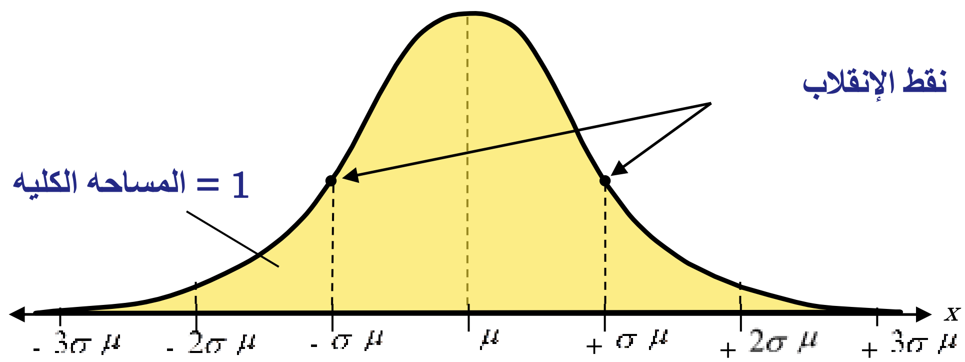
إذا كانت x متغيراً عشوائياً متصلاً يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ و تباينه σ^2 يمكن رسم المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي بإستخدام المعادله

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad ; \; -\infty \le x \le \infty$$

فإنه يقال إن x تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ و تباينه σ^2. و تكتب اختصاراُ

$$X \sim N(\mu , \sigma^2)$$





خصائص المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى

1. طرفا التوزيع تمتد من $-\infty$ إلى ∞
2. متماثل حول العمود الذى يمر بقمته أى عند $X=\mu$ لذلك فإن هذا العمود يجزئ المنحنى الطبيعى القياسى إلى قسمين متماثلين فى الشكل والمساحه.
3. يشبه الناقوس من حيث الشكل.
4. المنحنى له نقطتا إنقلاب عند $X=\mu\pm\sigma$
5. المساحه الكليه تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح .
6. نظرا لتطابق جانبيه وتوسط تفرطحه فإن مقاييس النزعه المركزيه الثلاثه (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال) تلتقى فى نقطه واحده (فى منتصف التوزيع) أى أن الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال
7. نلاحظ أن 99.7% من قيم المتغير تقع تقريبا فى الفتره ($\mu-3\sigma\ ,\ \mu+3\sigma$) أى أنه نادرا ما نجد قيمه من قيم X خارج هذه الفتره. كما أن 95.5% من قيم المتغير X تقع فى الفتره ($\mu-2\sigma\ ,\ \mu+2\sigma$) وأن% 68 منها تقع فى الفتره($\mu-\sigma\ ,\ \mu+\sigma$)

ويمكن حساب إحتمال وقوع X في أى فتره تريدها وذلك بإيجاد قيمه تكامل داله الكثافه الإحتماليه فى هذه الفتره أى بإيجاد المساحه المحصوره تحت منحنى هذه الداله داخل هذه الفتره . فمثلا الإحتمال $P(a \le X \le b)$ يعطى بالمساحه المظلله فى الشكل الآتى:-

مثال

إذا كان متوسط أطوال المجندين فى وحده عسكريه ما 70 بوصه بإنحراف معيارى قدره 2 بوصه صف هذه البيانات مستخدما القوانين العمليه فى الفقره 7.

الحل:

1. 68% من الحالات فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين $\mu-\sigma$ ، $\mu+\sigma$

$=(70-1\times2) ، (70+1\times2)$

$=70-2 ، 70+2$

$=68 ، 72$

أى أن 68 % من المجندين فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين 68 بوصه و 72 بوصه .

2. 9505% من الحالات فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين $\mu-2\sigma$ ، $\mu+2\sigma$

$=(70-2\times2) ، (70+2\times2)$

$=(70-4) ، (70+4)$

$=66 ، 74$

أى أن 95.5 % من المجندين فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين 66 بوصه و 74 بوصه .

3. 99.7% من الحالات فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين $\mu-3\sigma$ ، $\mu+3\sigma$

$=(70-3\times2) ، (70+3\times2)$

$=(70-6) ، (70+6)$

64= ، 76

أى أن 99.7 % من المجندين فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين 64 بوصه و 76 بوصه .

و تختلف التوزيعات الطبيعية باختلاف كل من المتوسط و التباين و لتسهيل حساب الاحتمالات في حالة التوزيع الطبيعي فإننا لابد وأن نتعرض للتوزيع الطبيعي القياسي.

التوزيع الطبيعى القياسى

التوزيع الطبيعى القياسى هو التوزيع الطبيعى بمتوسط $\mu = 0$ وتباين $\sigma^2 = 1$.أي أن أي قيمه من قيم المتغير X يمكن تحويلها إلي المتغير Z الذي يتبع التوزيع الطبيعى القياسى بإستخدام التحويله

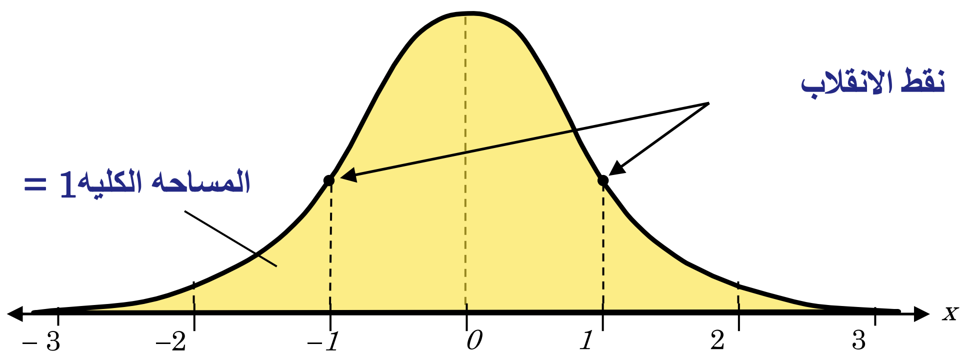
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ويمكن رسم المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى القياسى بإستخدام المعادله

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \ -\infty \le z \le \infty.$$

والشكل الأتى يوضح المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى القياسى

المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى القياسى



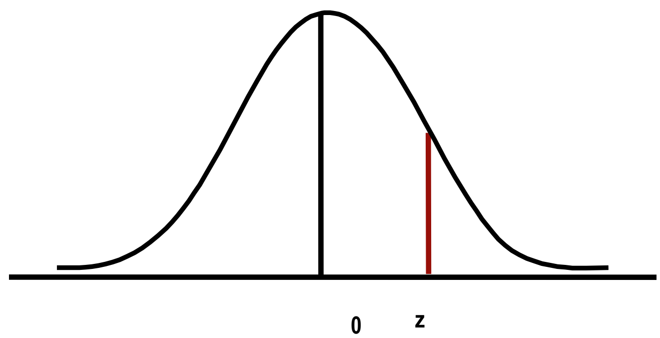
خصائص المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى القياسى

1. طرفا التوزيع تمتد من $-\infty$ إلى ∞
2. متماثل حول العمود الذى يمر بقمته أى عند $X = \mu = 0$ لذلك فإن هذا العمود يجزئ المنحنى الطبيعى القياسى إلى قسمين متماثلين فى الشكل والمساحه.
3. يشبه الناقوس من حيث الشكل.
4. المنحنى له نقطتا إنقلاب عند $X = \pm 1$
5. المساحه الكليه تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح .
6. نظرا لتطابق جانبيه وتوسط تفرطحه فإن مقاييس النزعه المركزيه الثلاثه (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال) تلتقى فى نقطه واحده (فى منتصف التوزيع) أى أن الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال = 0
7. نلاحظ أن 99.7% من قيم المتغير تقع تقريبا فى الفتره (3 ,3-) أى أنه نادرا ما نجد قيمه من قيم X خارج هذه الفتره. كما أن 95.5% من قيم المتغير X تقع فى الفتره (2, 2-) وأن% 68 منها تقع فى الفتره(1,1-)

ويمكن حساب إحتمال وقوع Z في أى فتره تريدها وذلك بإيجاد قيمه تكامل داله الكثافه الإحتماليه فى هذه الفتره أى بإيجاد المساحه المحصوره تحت منحنى هذه الداله داخل هذه الفتره

ولان متوسط التوزيع الطبيعى القياسى دائما يساوى صفر وتباينه يساوى واحد فقد تم عمل جدول يعطى إحتمالات وقوع المتغير Z فى فتره معينه .

فمثلا يمكن بواسطه الجدول رقم (1) حساب الإحتمال $p(1 \le Z \le 2)$. والجدول يعطى إحتمال وقوع Z بين الصفر وأى قيمه موجبه Z أى يعطى $p(0 \le Z \le z)$ وهى المساحه المظلله فى الشكل الآتى:-



ملاحظات:-

1. $P(-\infty \le Z \le \infty) = 1$
2. $P(Z \le 0) = P(Z \ge 0) = 0.5$

مثال:-

إذا كان Z متغير عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى القياسى فأوجد

1. $P(Z \le 1.54)$
2. $P(-1.8 \le Z \le 0)$
3. $P(1 \le Z \le 2)$

الحل

$P(Z \leq 1.54) = 0.9382$ .1

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505

$P(- 1.8 \leq Z \leq 0)$ .2

$= P(Z \leq 0) – P(Z \leq -1.8)$

$= 0.5 – 0.359$

$= 0.4641$

z	0.00	0.01	0.02
0.0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
0.2	0.5793	0.5832	0.5871
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	0.6985

z	0.00	0.01
−3.4	0.0003	0.0003
−3.3	0.0005	0.0005
−3.2	0.0007	0.0007
−3.1	0.0010	0.0009
−3.0	0.0013	0.0013
−2.9	0.0019	0.0018
−2.8	0.0026	0.0025
−2.7	0.0035	0.0034
−2.6	0.0047	0.0045
−2.5	0.0062	0.0060
−2.4	0.0082	0.0080
−2.3	0.0107	0.0104
−2.2	0.0139	0.0136
−2.1	0.0179	0.0174
−2.0	0.0228	0.0222
−1.9	0.0287	0.0281
−1.8	0.0359	0.0351
−1.7	0.0446	0.0436

3. $\mathbf{P(1 \leq Z \leq 2)}$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1)$$

$$P(1 \leq Z \leq 2) =$$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1)$$

$$= 0.1359$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927

حساب الاحتمالات في حالة التوزيع الطبيعي العادي

إذا كانت X تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ و تباينه σ^2 و أردنا حساب أي احتمال حول المتغير X فإننا نحوله أولاً إلى متغير يتبع التوزيع الطبيعي القياسي

إذا كانت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

و على ذلك يمكن حساب الاحتمال $P(a < X < b)$ كما يلي :

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

و هذا الاحتمال الأخير يمكن الحصول عليه من جدول التوزيع الطبيعي القياسي

إذا كانت أطوال مجموعه من النباتات تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 168 سم و انحرافه المعياري 6 سم. أخذنا عشوائياً أحد النباتات. ما هو احتمال أن يكون طوله:

1. أقل من 159 سم؟
2. أكبر من 180 سم؟
3. واقعاً في الفترة(174 , 165) ؟

الحل

1. أقل من 159 سم

إذا جعلنا X ترمز لأطوال النباتات, فإن X تكون متغيراً عشوائياً يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 168 سم
وانحرافه المعياري 6 سم.

$$
\begin{aligned}
P(X \le 159) &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{159-168}{6}\right) \\
&= P(Z \le -1.5) \\
&= 0.0668
\end{aligned}
$$

z	0.00	0.01	0.02
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778

2. أكبر من 180 سم؟

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 180) &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{180-168}{6}\right) \\
&= P(Z \geq 2) \\
&= 1 - P(Z \leq 2) \\
&= 1 - 0.9772 \\
&= 0.0228
\end{aligned}
$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869
1.3	0.9032	0.9049
1.4	0.9192	0.9207
1.5	0.9332	0.9345
1.6	0.9452	0.9463
1.7	0.9554	0.9564
1.8	0.9641	0.9649
1.9	0.9713	0.9719
2.0	0.9772	0.9778
2.1	0.9821	0.9826
2.2	0.9861	0.9864

3. واقعاً في الفترة(174 , 165)؟

$$
\begin{aligned}
&P(165 \le X \le 174) \\
&= P\left(\frac{165-168}{6} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{174-168}{6}\right) \\
&= P(-0.5 \le Z \le 1) \\
&= P(Z \le 1) - P(Z \le -0.5) \\
&= 0.8413 \quad - \quad 0.3085 \quad = \quad 0.5328
\end{aligned}
$$

z	0.00	0.01
−3.4	0.0003	0.0003
−3.3	0.0005	0.0005
−3.2	0.0007	0.0007
−3.1	0.0010	0.0009
−3.0	0.0013	0.0013
−2.9	0.0019	0.0018
−2.8	0.0026	0.0025
−2.7	0.0035	0.0034
−2.6	0.0047	0.0045
−2.5	0.0062	0.0060
−2.4	0.0082	0.0080
−2.3	0.0107	0.0104
−2.2	0.0139	0.0136
−2.1	0.0179	0.0174
−2.0	0.0228	0.0222
−1.9	0.0287	0.0281
−1.8	0.0359	0.0351
−1.7	0.0446	0.0436
−1.6	0.0548	0.0537
−1.5	0.0668	0.0655
−1.4	0.0808	0.0793
−1.3	0.0968	0.0951
−1.2	0.1151	0.1131
−1.1	0.1357	0.1335
−1.0	0.1587	0.1562
−0.9	0.1841	0.1814
−0.8	0.2119	0.2090
−0.7	0.2420	0.2389
−0.6	0.2743	0.2709
−0.5	0.3085	0.3050
−0.4	0.3446	0.3409

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869

مثال

وجد أستاذ مادة الإحصاء الإجتماعى أن متوسط الوقت الكافى الذى يحتاجه الطلاب لإكمال إمتحانهم النهائى = 150 دقيقه بإنحراف معيارى قدره 30 دقيقه.

أوجدى الآتى:

1. ما إحتمال أن يكمل الطلاب إمتحانهم بين 125و 150 دقيقه.

2. ما إحتمال أن يكمل الطلاب إختبارهم فى 185 دقيقه أو أقل

3. ما إحتمال أن يكمل الطلاب إختبارهم فى وقت يزيد على 195 دقيقه

4. إذا كان عدد الطلاب 1000 طالب . أوجد عدد الطلاب الذين اكملوا امتحانهم في وقت يزيد على 185 دقيقة ؟

<u>الحل</u>

1. إحتمال أن يكمل الطلاب إمتحانهم بين 125و 150 دقيقه

$$P(125 \le X \le 150)$$

$$\begin{aligned}
&P(125 \le X \le 150) \\
&= P\left(\frac{125-150}{30} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{150-150}{30}\right) \\
&= P(-0.83 \le Z \le 0) \\
&= P(Z \le 0) - P(Z \le -0.83) \\
&= 0.5000 - 0.2033 = 0.2967
\end{aligned}$$

وعليه نقرر أن إحتمال إكمال الطلاب لإمتحانهم فى فتره زمنيه تتراوح بين 125 و 150 دقيقه =29.7 % .

2. إحتمال أن يكمل الطلاب إختبارهم فى 185 دقيقه أو أقل

$$\begin{aligned}
&P(X \le 185) \\
&= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{185-150}{30}\right) \\
&= P(Z \le 1.17) = 0.8790
\end{aligned}$$

وعليه نقرر أن إحتمال إكمال الطلاب لإمتحانهم فى فتره زمنيه 185 دقيقه أو أقل = 87.9 %

3. ما إحتمال أن يكمل الطلاب إختبارهم فى وقت يزيد على 195 دقيقه .

الحل :

أولاً: تحويل المسافه بين المتوسط 150 والدرجه الخام 195 إلى درجه معياريه بإستخدام طريقة تحويل (z).

$$
\begin{aligned}
& P(X \geq 185) \\
& = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{195-150}{30}\right) \\
& = P(Z \geq 1.5) \;\; = 1 - P(Z \leq 1.5) \\
& = 1 - 0.9332 = .0668
\end{aligned}
$$

أى أن إحتمال أن يكمل الطلاب إختيارهم فى وقت يزيد على 195 دقيقه =6.7 %تقريباً.

4. عدد الطلاب الذين اكملوا امتحانهم في وقت يزيد على 185 دقيقة :

عدد الطلاب الكلي × $P(X \geq 185)$

$1000 \times 0.0668 = 66.8 \approx 66$ طالب

توزيع ذي الحدين :- The Binomial Distribution.

إذا كانت هناك نجربه عشوائية لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين نجاح او عدم ظهور فشل مثل نجاح
الطالب او فشلة، المصباح الكهربائي جيد او تالف، وصول طائرة فى موعدها او عدم وصولها، ظهور الصورة
عند القاء قطعة نقود او عدم ظهورها.

ـــ و إذا أجريت هذه التجربة n من المرات

و اذا افترضنا أيضا أن احتمال نجاح هذه التجربة هو p . و احتمال فشلها هو q =1-p حيث p + q = 1

ـــ نفرض أن x هو التغير العشوائي المعرف على هذه التجربة و يرمز الى عدد مرات النجاح لهذه التجربة.

تعطى دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X و التي نرمز لها بالرمز f (x) بالمعادلة

$$p\left(X=x\right)= f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} & x=0,1,2,....,n\\ 0 & else\ where.\end{cases}$$

حيث n عدد صحيح موجب، $0 \langle p \langle 1$

نحت هذه الشروط واضح أن $f(x) \geq 0$

مفكوك ذي الحدين.

$$(a+b)^n = \sum_{x=o}^{n} \binom{n}{x} b^x \; a^{n-x}$$

ـــ أذا كانت f(x) دالة كثافة احتمال للتغير العشوائي x يجب أن تحقق

$$1)\; f(x) \geq o$$

$$2) \sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$$

$$1) \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)\,!} \rangle\; o \qquad\qquad f(x) \geq 0$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots.. \; n$$

وايضا p^x , $q^{n-x} = (1-p)^{n-x}$ موجبتان لجميع قيم x حيث $x = 0, 1, 2, \ldots., \; n$ و منها نستنتج أن f(x) موجبة.

2ـ ثانيا

$$\sum_{x=o}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = [(1-p) + p]^n = 1$$

إي أن f (x) نحقق شروط دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X المنفصل و يطلق عليها دالة كثافة احتمال

ذى الحديين binomial p.d.f و يقال فى هذة الحالة أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحديين بعدد مرات n.p و يرمز لذلك بالرمز $X \sim b(n, p)$

و اذا قلنا مثلاً أن في هذه الحالة $X \sim b\left(5, \frac{1}{3}\right)$ تكون دالة كثافة الاحتمال

$$f(x)=\binom{5}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \qquad x=0,1,2,.....,5$$

ثانيا :ـ الدالة المولدة للعزوم لتوزيع ذى الحديين.

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x} P^{x}\,(1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(pe^{t}\right)^{x}(1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

لجميع قيم t الحقيقية.

$$M(t) = \left[(1-p) + pe^{t}\right]^{n}$$