استمرارية الدالة عند النقطة

نقول ان الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة a اذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

هذا يعني ان مفهوم الاستمرارية مفهوم يعتمد اعتماد كلي على الغاية ووجودها من عدمه.

لاحظ :- ان مفهومي الغاية والاستمرارية للدالة معرفين على نقطة معينة اي انهما يتغيران من نقطة الى اخرى لنفس الدالة.

بمعنى اخر:-

اذا كانت f دالة و كان العدد a ينتمي الى مجال الدالة f تكون الدالة f مستمرة عند $x=a$ اذا تحقق الشروط التالية :

1- $f(a)$ معرفة عند $x=a$.

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ *موجودة عند* x *تقترب من* a.

3- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *بمعنى ان غاية الدالة عند النقطة تساوي صورة الدالة بنفس النقطة.*

مثال :- *ابحث استمرارية الدالة* $f(x) = x^2 + 3$ عند $x = 1$؟

الحل :-

1- $f(1) = (1)^2 + 3 = 4$

2- $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 + 3 = (1)^2 + 3 = 4$

3- $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

:. الغاية موجودة عند x=1. *اذن* f *مستمرة عند* x=1.

مثال :- *ابحث استمرارية الدالة*

$f(x) = \frac{x}{x+1}$ عند $x = 3$?

الحل :-

1- $f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

2- $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

3- $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

اذن f *مستمرة عند* x=3

مثال :- *ابحث استمرارية الدالة*

$f(x) = x^3 + 1$ عند $x = 1$ ؟

الحل:

1- $f(1) = (1)^3 + 1 = 1 + 1 = 2$

2- $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} x^3 + 1 = (1)^3 + 1 = 2$

3- $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

اذن f مستمرة عند x=1

مثال :- *لتكن*

$f(x) = 3x + 2$ هل ان الدالة f مستمرة عند $x = a$ *بين ذلك؟*

الحل :-

ان اوسع مجال للدالة f هو R ، لنبرهن ان لكل $a \in R$ فان f مستمرة عند $x = a$.

1- $f(a) = 3a + 2$

2- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} 3x + 2 = 3a + 2$

3- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ الغاية موجودة عند $x = a$

f مستمرة عند $x = a$

مثال :- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

هل f مستمرة عند $x = 0$ ؟ بين ذلك

الحل :-

1- $f(0) = (0)^2 + 1 = 1$

2- $\lim_{x\to0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0} x^2 + 1 = (0)^2 + 1 = 1 = L_1 \\ \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0} 2x + 3 = 2(0) + 3 = 3 = L_2 \end{cases}$

$\therefore$ الغاية غير موجودة عند $x = 0$ *لان* $L_2 \neq L_1$.

f غير مستمرة عند $x = 0$.

مثال :- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x<-1 \\ 2x^2+1 & x \geq -1 \end{cases}$$

هل f مستمرة عند $x=-1$ ؟ بين ذلك

الحل :-

1- $f(-1) = 2\,(-1)^2+1 = 2+1 = 3$

2- $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} 2x^2+1 = 2(-1)^2+1 = 3 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} 2-x = 2-(-1) = 3 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة عند $x=-1$ لان $L_2 = L_1$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

$\therefore$ f مستمرة عند $x=-1$.

مثال :- ابحث استمرارية الدالة

$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ عند $x = 1$ ؟

الحل :-

1- $f(1) = \frac{1+3}{1+1} = 2$

2- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+3}{x^2+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2$

3- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$

f مستمرة عند $x = 1$.

مثال :- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq -1 \\ x^2 & x < -1 \end{cases}$$

هل f مستمرة عند $x=-1$ ؟ بين ذلك

الحل :-

$1\text{-}\ f(-1) = 3\,(-1) + 1 = -3 + 1 = -2$

$$2\text{-}\ \lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} 3x + 1 = -3 + 1 = -2 = L_1 \\ \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} x^2 = (-1)^2 = 1 = L_2 \end{cases}$$

∴ الغاية غير موجودة عند $x = -1$ لان $L_2 \neq L_1$

$\lim_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$

∴ f غير مستمرة عند $x = -1$.

مثال :- ابحث استمرارية الدالة $x = 3$ عند $f(x) = x^3 + x^2 + 3$.

الحل :-

$1\text{-}\ f(3) = (3)^3 + (3)^2 + 3 = 27 + 9 + 3 = 39$

$2\text{-}\ \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x^3 + x^2 + 3 = (3)^3 + (3)^2 + 3 = 27 + 9 + 3 = 39$

$3\text{-}\ \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

∴ f مستمرة عند $x = 3$

مثال :- ابحث استمرارية الدالة

$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ اثبت ان الدالة مستمرة في مجالها ؟

الحل :-

أوسع مجال للدالة f هو R لكل $a \in R$

لنبرهن ان f مستمرة عند $x = a$

$1\text{-}\ f(a) = \frac{a^2}{a^2+1}$

$2\text{-} \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{a^2}{a^2+1}$

$3\text{-}\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

f مستمرة عند $x = a$

مثال :- *لتكن*

ابحث استمرارية الدالة في مجالها ؟ $f(x) = x^3$

الحل :-

أوسع مجال للدالة f هو R لكل $a \in R$

لنبرهن ان f مستمرة عند $x = a$

1- $f(a) = a^3$

2-$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^3 = a^3$

3- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

∴ الغاية موجودة عند x = a

f مستمرة عند x = a

مثال :- : لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq -1 \\ 3x + 1 & x < -1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة f مستمرة عند $x = -1$ ؟

الحل :-

1- $f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$

2- $\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1 = L_1 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 3x + 1 = 3(-1) + 1 = -2 = L_2 \end{cases}$

∴ الغاية غير موجودة عند $x = -1$ لان $L_2 \neq L_1$

f غير مستمرة عند $x = -1$

مثال :- : لتكن

$f(x) = |x - 2|$ هل f مستمرة عند x =2 ؟ بين ذلك

الحل :-

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

1- $f(2) = 2 - 2 = 0$

2- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = |x-2| = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x - 2 = 2 - 2 = 0 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} -(x-2) = -(2-2) = 0 = L_2 \end{cases}$

∴ الغاية موجودة عند $x = 2$ لان $L_2 = L_1$

3- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

f مستمرة عند $x = 2$.

مثال :- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \geq 2 \\ 1 - x^2 & x < 2 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة f مستمرة عند $x = 2$ ؟

الحل :-

1- $f(2) = 1 - 2(2) = 1 - 4 = -3$

2- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 1 - 2x = 1 - 2(2) = -3 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 1 - x^2 = 1 - (2)^2 = -3 = L_2 \end{cases}$

∴ الغاية موجودة عند $x = 2$ لان $L_2 = L_1$

3- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

f مستمرة عند $x = 2$

مثال :- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$$

جد قيمة a اذا كانت f مستمرة عند $x = 1$ ؟

الحل :-

بما ان الدالة مستمرة

الغاية من ايمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 1} ax + 3 = \lim_{x\to 1} 3x^2 + 1$$

$$a(1) + 3 = 3(1)^2 + 1 \ \rightarrow a + 3 = 3 + 1 \ \rightarrow a = 4 - 3 = 1$$

مثال :-لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 2x + b & x < -1 \\ x^2 + a & x \geq -1 \end{cases}$$

جد قيمة a , b اذا كانت f مستمرة عند $x = -1$ و ان f(2) = 7

الحل :-

$$f(2) = 7 \ \rightarrow (2)^2 + a = 7 \ \rightarrow 4 + a = 7 \ \rightarrow a = 7 - 4 = 3$$

بما ان الدالة مستمرة

الغاية من ايمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to -1} x^2 + 3 = \lim_{x\to -1} 2x + b$$

$$(-1)^2 + 3 = 2(-1) + b \ \rightarrow 1 + 3 = -2 + b \ \rightarrow b = 4 + 2 = 6$$