الفصل الرابع

مقاييس النزعة المركزية_مقاييس النزعة المركزية (مقاييس الموضع)

Measures of Central Tendency (Location Measures)

مقدمة:

مقاييس النزعة المركزية هي مقاييس عددية تستخدم لقياس موضع تركز أو تجمع البيانات. إذ أن بيانات أي ظاهر تنزع في الغالب إلى التركز والتجمع حول قيم معينة. هذه القيم هي ما تسمى بمقاييس النزعة المركزية. ومقاييس النزعة المركزية تستخدم لتلخيص البيانات عدديًا إذ أنها تعتبر قيم نموذجية أو مثالية للبيانات. كما أن هذه المقاييس تستخدم لوصف مجموعة البيانات وكذلك لمقارنة مجموعات البيانات المختلفة. ومن أهم هذه المقاييس نذكر: الوسط الحسابي (أو المتوسط)، الوسط الموزون (أو المرجح)، الوسيط، والمنوال.

تعريف (1): رمز التجميع:

إذا كان عدد البيانات هو n وكانت البيانات هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإن مجموع هذه البيانات هو:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

خواص رمز التجميع:

يتمتع التجميع بالخواص التالية:

1. $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} c x_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} c = n\, c$

وبعد أن عرفنا رمز التجميع وخواصه نشرع في التطرق لمقاييس النزعة المركزية مبتدئين بالوسط الحسابي.

الوسط (المتوسط) الحسابي : Arithmetic Mean

يعتبر المتوسط من أهم وأفضل مقاييس النزعة المركزية ومن أكثرها شيوعًا واستخدامًا في التحليل الإحصائي وذلك لما يتمتع به من خصائص وصفات إحصائية جيدة. ولإيجاد المتوسط للبيانات فإننا لابد أن نفرق بين البيانات المفردة (غير مبوبة في جدول تكراري) والبيانات المبوبة (الملخصة في جدول تكراري).

أولاً: الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة :

إذا كان عدد البيانات (حجم العينة) هو n وكانت قيم أو مشاهدات العينة هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإن الوسط الحسابي يرمز له بالرمز $\bar{x}$ ويعرف بالصيغة التالية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عدد البيانات}}$$

أي أن:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

مثال (1):

أوجد الوسط الحسابي للمشاهدات التالية والتي هي عبارة عن أوزان (بالكيلوغرام) لمجموعة مكونة من سبعة

أشخاص:

25, 30, 40, 45, 35, 55, 50

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_7}{7}$$

$$\bar{x} = \frac{25+30+40+45+35+55+50}{7} = \frac{280}{7} = 40$$

مثال(2) :

اذا كانت درجات مادة الرياضيات لمجموعة من الطلاب هي كالاتي

9,4,5,7,6,8 جد الوسط الحسابي ؟

الحل /

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \frac{9+4+5+7+6+8}{6} = \frac{39}{6}$$

$$= 6.5$$

مثال(3) / اذا كان مستوى هيموغلوبين الدم لدى ثمانية اشخاص كالاتي

13,10,12,13,11,10,13,10

جد الوسط الحسابي ؟

الحل /

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \frac{10+13+10+12+13+11+10+13}{8}$$

$$= \frac{92}{8} = 11.5$$

مثال(4) :

اذا كان متوسط مستوى الهرمون المحفز لنمو الحويصلات يساوي 18 حيث كان مستوى الهرمون المحفز في انثى الارنب الاولى = 18 وفي الثانية = 19 والثالثة = 17 اما في الرابعة = 19 جد مستوى الهرمون في انثى الارنب الخامسة ؟

الحل /

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$18 = \frac{18+19+17+19+X_5}{5}$$

$$90 = 73 + X_5 \quad , X_5 = 17$$

ثانياً: الوسط الحسابي للبيانات المبوبة:

ينبغي علينا ملاحظة ما يلي في حالة البيانات الملخصة في جدول توزيع تكراري:

1. البيانات الأصلية غير معروفة.
2. عدد البيانات في كل فترة (تكرار الفترة) معروف.
3. يستخدم مركز الفترة كقيمة تقريبية لجميع البيانات في الفترة.

إذا كان لدينا بيانات عددها n وكانت هذه البيانات ملخصة في جدول تكراري بحيث أن:

1. عدد الفترات هو k.
2. مراكز الفترات هي $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
3. تكرارات الفترات هي $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

أي أن البيانات قد تم تلخيصها في جدول التوزيع التكراري التالي:

التكرار f	مركز الفترة x	الفترة
f_1	x_1	الفترة رقم 1
f_2	x_2	الفترة رقم 2
: :	: :	: :
f_k	x_k	الفترة رقم k
$\sum f = n$		المجموع

ولحساب المتوسط بالطريقة الحسابية فإنه يلزمنا فقط معرفة ما يلي:

1. حجم العينة = عدد البيانات = $n = \sum f$
2. مجموع البيانات = $\sum xf$

ولذلك فإن الوسط الحسابي للتوزيع التكراري المبوب يمكن حسابه بشكل تقريبي بالصيغة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{\sum xf}{n} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k}$$

ويكمن تلخيص عملية إيجاد المتوسط باستخدام الجدول التالي:

الفترة	مركز الفترة x	التكرار f	$x\,f$
الفترة رقم 1	x_1	f_1	$x_1 f_1$
الفترة رقم 2	x_2	f_2	$x_2 f_2$
:	:	:	:
:	:	:	:
الفترة رقم k	x_k	f_k	$x_k f_k$
المجموع		$= n \sum f$	$\sum xf$

مثال (5):

أوجد الوسط الحسابي لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا

مستوى الهيموجلوبين	12.95 – 13.95	13.9 5– 14.95	14. 95– 15.95	15. 95– 16.95	16. 95– 17.95	17. 95– 18.95
التكرار	**3**	**5**	**15**	**16**	**10**	**1**

الحل:

مستوى الهيموجلوبين	مركز الفترة x	التكرار f	xf
12.95 – 13.95	13.45	3	40.35
13.9 5– 14.95	14.45	5	72.25
14. 95– 15.95	15.45	15	231.75
15. 95– 16.95	16.45	16	263.20
16. 95– 17.95	17.45	10	174.50
17. 95– 18.95	18.45	1	18.45
المجموع		$n = \sum f = 50$	$\sum xf = 800.5$

الوسط الحسابي هو:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{800.5}{50} = 16.01$$

بعض خصائص الوسط الحسابي :

1. المجموع الجبري لانحرافات القيم عن الوسط الحسابي $\bar{x}$ يساوي الصفر. أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = (x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_n-\bar{x}) = 0$$

حيث أن $(x_i-\bar{x})$ هو انحراف القيمة x_i عن وسطها الحسابي $\bar{x}$.

2. مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابي $\bar{x}$ أصغر من أو يساوي مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة حقيقية c، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2$$

وبشكل مكافئ فإن:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\min_{-\infty<c<\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-c\right)^2$$

3. الوسط الحسابي يخضع للعمليات الجبرية بسهولة. فإذا كان $\bar{x}$ هو متوسط البيانات $x_1,x_2,\ldots,x_n$

وكان a و b مقدارين ثابتين، فإن:

أ- متوسط البيانات $x_1\pm b,x_2\pm b,\cdots,x_n\pm b$ هو $\overline{(x\pm b)}=\bar{x}\pm b$.

ب- متوسط البيانات $ax_1,ax_2,\ldots,ax_n$ هو $\overline{ax}=a\bar{x}$.

ج- متوسط البيانات $ax_1\pm b,ax_2\pm b,\cdots,ax_n\pm b$ هو $\overline{(ax\pm b)}=a\bar{x}\pm b$.

ويمكن تلخيص هذه الخاصية في الجدول التالي:

المشاهدات	الوسط الحسابي (المتوسط)
$x_1,x_2,\ldots,x_n$	$\bar{x}$
$x_1\pm b,x_2\pm b,\cdots,x_n\pm b$	$\overline{(x\pm b)}=\bar{x}\pm b$
$ax_1,ax_2,\ldots,ax_n$	$\overline{ax}=a\bar{x}$
$ax_1\pm b,ax_2\pm b,\cdots,ax_n\pm b$	$\overline{(ax\pm b)}=a\bar{x}\pm b$

مثال (6):

الوسط الحسابي	المشاهدات	
$\bar{x} = 4$	2, 6, 4, 3, 5	$: x$
$\bar{x} + 5 = 9$	7, 11, 9, 8, 10	$: x+5$
$3\bar{x} = 12$	6, 18, 12, 9, 15	$:3x$
$3\bar{x} + 5 = 17$	11, 23, 17, 14, 20	$: 3x+5$

مثال (7):

إذا كـان الوسـط الحسـابي للمشـاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هـو 15 فـإن الوسـط الحسـابي للمشـاهدات

$$\frac{x_1-10}{2}, \frac{x_2-10}{2}, \ldots, \frac{x_n-10}{2}$$

هو $2.5 = \frac{15-10}{2} = \frac{\bar{x}-10}{2}$.

4. إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات بحيث أن عدد بيانات المجموعة الأولى هو n_1 و وسطها هو $\bar{x}_1$ وكان عدد بيانات المجموعة الثانية هو n_2 و وسطها هو $\bar{x}_2$ فإن وسط المجموعة الكلية $(\bar{x})$ المكونة من دمج هاتين المجموعتين يمكن حسابه بالصيغة التالية:

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

مثال (8):

إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات بحيث أن عدد بيانات المجموعة الأولى هو 10 و وسطها الحسابي هو 5 وكان عدد بيانات المجموعة الثانية هو 20 و وسطها الحسابي هو 2، فأوجد الوسط الحسابي للمجموعة الكلية المكونة من دمج هاتين المجموعتين.

الحل:

$$n_1 = 10, \bar{X}_1 = 5$$
$$n_2 = 20, \bar{X}_2 = 2$$

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{10 \times 5 + 20 \times 2}{10 + 20} = \frac{90}{30} = 3$$

مثال(9) :

في امتحان مادة الرياضيات لمئة طالب وكان الامتحان من عشرة درجات وتم الحصول على البيانات الاتية:

4	5	6	7	8	9	10	x_i
2	8	13	35	21	16	5	f_i

جد الوسط الحسابي ؟

الحل/

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

x_i	f_i	$x_i f_i$
10	5	50
9	16	144
8	21	168
7	35	245
6	13	78
5	8	40
4	2	8
المجموع	100	733

$$\bar{X} = \frac{733}{100} = 7.33$$

1- في حالة وجود فئات يجب استخراج مركز الفئة عن طريق العلاقة الاتية :

$مركز\ الفئة = \frac{\text{الحد الاعلى للفئة+ الحد الادنى للفئة}}{2}$

مثال(10)/ اوجد الوسط الحسابي لمجموعة البيانات الاتية :

الفئات	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
التكرارات	12	8	6	2	27	16	14	8	5	2

الحل/

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

الفئات	التكرارات(f)	مركز الفئة (x)	$X*f$
10-14	12	12	144
15-19	8	17	136
20-24	6	22	132
25-29	2	27	54
30-34	27	32	864
35-39	16	37	592
40-44	14	42	588
45-49	8	47	376
50-54	5	52	260
55-59	2	57	114
المجموع	*100*		*3260*

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{3260}{100} = 32.6$$

بعض مميزات وعيوب الوسط الحسابي :

لكل مقياس من مقاييس النزعة المركزية مميزاته وعيوبه. ونورد فيما يلي بعض مميزات وعيوب المتوسط.

(أ) مميزات الوسط الحسابي:

يعتبر الوسط الحسابي من أفضل مقاييس النزعة المركزية ومن أكثرها شيوعًا وذلك لما يتمتع به من صفات جيدة. ومن مميزات الوسط الحسابي نذكر ما يلي:

1. الوسط الحسابي سهل التعريف والحساب ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة.
2. الوسط الحسابي وحيد لمجموعة البيانات الواحدة.
3. يأخذ الوسط الحسابي في الاعتبار جميع البيانات.

(ب) **عيوب** الوسط الحسابي:

بالرغم من أن الوسط الحسابي يعتبر من أفضل مقاييس النزعة المركزية إلا أن له بعض العيوب نذكر منها ما يلي:

1. يتأثر الوسط الحسابي بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
2. الوسط الحسابي غير معرف للبيانات الوصفية (النوعية) إذ يمكن حسابه للبيانات الكمية فقط.