الفصل الثاني

الغايات والاستمرارية

مقدمة

ان مفهوم الغاية من اهم المفاهيم الاساسية في موضوع الرياضيات وهو مفهوم يتعلق بسلوك الدالة عندما يقترب متغيرها نحو عدد معين أو نحو اللانهاية.

تعريف(الغاية): لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية R بحيث ان الدالة f معرفة من المجموعة A في R.

نقول ان الدالة $f: A \to R$ تنتهي الى $b \in R$ عندما تنتهي النقطة x الى النقطة x_0 في R نرمز لذلك بالرمز $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ أو $f(x) \to b$ عندما $x \to x_0$ اذا تحقق الشرط التالي:-

لكل عدد حقيقي موجب ε يمكن ايجاد عدد حقيقي موجب أخر $\delta = \delta(\varepsilon)$ بحيث يكون

$\forall x \epsilon A$ فأن $|f(x) - b| < \varepsilon \Leftarrow |x - x_0| < \delta$.

يعني أن $f(x)$ تقترب من b عندما تقترب x من x_0 .

والبحث عن غاية دالة هو البحث عن قيمة تقترب اليها الدالة f(x) عندما تقترب x من عدد x_0 .

لحساب غاية الدالة f(x) عندما $x \to a$ نعوض في هذه الدالة عند $x = a$ وقد نحصل عليها وقد لا نحصل عليها عندئذ نتبع طرق أخرى سنتطرق اليها في ما بعد.

قوانين الغايات:-

1. **غاية الدالة الثابتة = الثابت نفسه** $\boldsymbol{f(x) = c}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

مثال1:- أوجد غاية الدوال التالية:

$$\lim_{x \to -2} 5, \lim_{x \to 0} \sqrt{7}$$

الحل:- $\lim_{x \to -2} 5 = 5$, $\lim_{x \to 0} \sqrt{7} = \sqrt{7}$

2. **غاية الدالة كثيرة الحدود :**أي الدالة لا تحتوي على كسر

لايجاد الغاية نعوض مباشرة في الدالة

مثال 2 :- جد

$$\lim_{x \to -1} (x^3 + 2x + 3)$$

الحل :-

$$\lim_{x \to -1} (x^3 + 2x + 3) = (-1)^3 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

مثال 2 :- جد

$$\lim_{x \to -3} (x^3 + 2x)$$

الحل :-

$$\lim_{x \to -3} (x^3 + 2x) = (-3)^3 + 2(-3) = -27 - 6 = -33$$

ملاحظة / اذا كانت الدالة جذرية نعوض مباشرة بشرط ان يكون الناتج اكبر او يساوي صفر

مثال :- جد

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{4x + 5}$$

الحل :-

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{4x + 5} = \sqrt{4(1) + 5} = \sqrt{9} = 3$$

مثال :

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{x + 2}$$

الحل :-

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{x + 2} = \sqrt{-2 + 2} = 0$$

3- اذا كانت الدالة كسرية توجد حالتين هما :

أ- التعويض المباشر

نستخدم طريقة التعويض عندما نعوض في المقام يكون المقام لا يساوي صفر كما في الأمثلة :

مثال :- جد

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+1}{x+1}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+1}{x+1}=\frac{(-2)^4+1}{-2+1}=\frac{16+1}{-1}=-17$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5}{2x+1}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5}{2x+1}=\frac{(0)^4+5}{0+1}=\frac{5}{1}=5$$

ب- طريقة التحليل : نستخدم طريقة التحليل عندما نعوض يكون المقام يساوي صفر و كما موضح في الأمثلة :

مثال :- جد

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3=3+3=6$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4=4+4+4=12$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-x-6}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{(x-3)}=\frac{-2}{-2-3}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2}{x^2+2x-1}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+5)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{(x+5)}=\frac{9+9+9}{3+5}=\frac{27}{8}$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)(x^2+1)$$

$$=(1+1)(1+1)=4$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2+4)}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2+4)}=\frac{4+4+4}{(-2-2)(4+4)}=\frac{12}{-4*8}=\frac{-3}{8}$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+7x^2-8x}{3x^2-3}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+7x^2-8x}{3x^2-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2+7x-8)}{3(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+8)(x-1)}{3(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+8)}{3(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1(1+8)}{3(1+1)}=\frac{3}{2}$$

الدالة الكسرية و تحتوي على جذر

الضرب فى العامل المرافق

نستخدم هذه الطريقة عندما نعوض فيكون المقام يساوي صفر كما موضح في الأمثلة :

مثال :- جد

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}*\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{\sqrt{3+1}+2}=\frac{1}{4}$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}*\frac{x+\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x^2-2)(x+\sqrt{2})}{x^2-2}=\lim_{x\to\sqrt{2}}x+\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}*\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=(1+1)\left(\sqrt{1}+1\right)=4$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to1}(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)$$

الحل :-

$$=\lim_{x\to1}(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)=(1+1)\left(\sqrt{1}+1\right)=2*2=4$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-9}{\sqrt{3x}-3}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-9}{\sqrt{3x}-3}=\frac{1-9}{\sqrt{3}-3}=\frac{-8}{\sqrt{3}-3}$$

مثال :- جد

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{\sqrt{x+10}-3}$$

الحل :-

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{\sqrt{x+10}-3}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{\sqrt{x+10}-3}*\frac{\sqrt{x+10}+3}{\sqrt{x+10}+3}=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}{x+10-}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}{x+1}=\lim_{x\to-1}x\left(\sqrt{x+10}+3\right)=-1\left(\sqrt{-1+10}+3\right)$$

$$-1(3+3)=-6$$

غاية الدالة المنفصلة

لايجاد غاية الدالة المنفصلة عند $x \to a$ نتبع ما يلي :

1- نجد غاية الدالة من اليمين $\lim_{x \to a^+} f(x)$ و نرمز لها بالرمز L_1

2- نجد غاية الدالة من اليسار $\lim_{x \to a^-} f(x)$ و نرمز لها بالرمز L_2

3- اذا كانت الغاية من اليمين = الغاية من اليسار اي ان $L_2 = L_1$ فأن للدالة غاية عند $x \to a$.

4- اذا كانت الغاية من اليمين ≠ الغاية من اليسار $L_1 \neq L_2$ فأنه ليس للدالة غاية عند $x \to a$.

مثال :- لتكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \leq 2 \\ x + 1 & x > 2 \end{cases}$$

هل للدالة غاية عند 2؟

الحل :-

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} x + 1 = 1 + 1 = 2 = L_1 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} 1 - x = 1 - 2 = -1 = L_2 \end{cases}$$

∴ ليس للدالة غاية لان $L_2 \neq L_1$.

مثال :- لتكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

هل للدالة غاية عند 1؟

الحل :-

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 1 + 1 = 2 = L_1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x = 2(1) = 2 = L_2 \end{cases}$$

∴ للدالة غاية لان $L_2 = L_1$

مثال :- لتكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x > 1 \\ b - 2x & x \leq 1 \end{cases}$$

و كانت $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجودة , $\lim_{x \to -1} f(x) = 5$ جد قيمة a , b ؟

الحل :-

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 5$$
$$\lim_{x\to -1} b - 2x = 5$$
$$b - 2(-1) = 5$$
$$b + 2 = 5$$
$$b = 5 - 2 = 3$$

بما انه الغاية موجودة أي ان الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 1} x^2 + a = \lim_{x\to 1} 3 - 2x$$
$$1 + a \ = \ 3 - 2$$
$$1 + a \ = 1$$
$$a = 1 - 1 = 0$$

مثال :- لتكن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} a + 2x & x \leq -1 \\ 3 - x^2 & x > -1 \end{cases}$$

و كانت $\lim_{x\to -1} f(x)$ موجودة , جد قيمة a حيث ان $a \in R$؟

الحل :-

بما انه الغاية موجودة أي ان الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to -1} a + 2x = \lim_{x\to -1} 3 - x^2$$
$$a - 2 = 3 - 1$$
$$a - 2 = 2$$
$$a = 2 + 2 = 4$$

مثال :-

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & x \geq 3 \\ x^2 - b & x < 3 \end{cases}$$

و كانت $\lim_{x\to 3} f(x)$ موجودة وان $f(\sqrt{2}) = 5$, جد قيمة a, b حيث ان $a, b \ \in R$؟

الحل :-

$$f(\sqrt{2}) = 5$$
$$(\sqrt{2})^2 - b = 5 \quad \to \quad 2 - b = 5 \quad \to \quad b = 2 - 5 = \ -3$$

بما ان الغاية موجودة

الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$\lim_{x\to3} x^2+3 = \lim_{x\to3} 3x+a$

$9+a = 9+3 \quad \to \quad 9+a = 12 \quad \to a = 12-9 = 3$

مثال :- اذاكانت $\lim_{x\to4} \frac{x^2-2x+6}{x+3} = 3a-4$ جد قيمة a حيث ان $a \in R$ ؟

الحل :-

$\lim_{x\to4} \frac{x^2-2x+6}{x+3} = 3a-4$

$\frac{16-2(4)+6}{4+3} = 3a-4$

$\frac{14}{7} = 3a-4$

$2 = 3a-4 \quad \to 3a = 2+4 \quad \to 3a = 6 \quad \to \quad a = 2$

مثال :- اذا كانت $\lim_{x\to1} \frac{x^2+3x-1}{x+2} = 2a+3$ جد قيمة a حيث ان $a \in R$ ؟

الحل :-

$\lim_{x\to1} \frac{x^2+3x-1}{x+2} = 2a+3$

$\frac{1+3-1}{1+2} = 2a+3$

$1 = 2a+3 \quad \to 2a = 1-3 \quad \to 2a = -2 \quad \to \quad a = -1$

مثال :- اذا كانت $f(x) = ax^2+bx$ وكانت $\lim_{x\to1} f(x) = 5$, $\lim_{x\to-2} f(x) = 8$ جد قيمتي a, b؟

الحل :-

$\lim_{x\to1} f(x) = 5 \quad \to \mathrm{a}(1)^2+\mathrm{b}(1) = 5 \quad \to \mathrm{a}+\mathrm{b} = 5 \quad \dots(1)$

$\lim_{x\to-2} f(x) = 8 \quad \to 4a-2b = 8 \quad \to 2a-b = 4 \quad \dots(2)$

نحل المعادلتين (1) و (2) انيا بالجمع

$3a = 9 \quad \to a = 3$

نعوض قيمة $a = 3$ في معادلة (1)

$3+b = 5 \quad \to b = 5-3 = 2$