الفصل الاول

المصفوفات و تطبيقاتها

1- مقدمة عامة

الجبر الخطي هو موضوع شامل إلى حد ما يغطي المتجهات والمصفوفات والمحددات وأنظمة المعادلات الخطية والمسافات المتجهة والتحولات الخطية ومشكلات القيمة الذاتية وموضوعات أخرى. كمجال للدراسة ، فإنه يتمتع بجاذبية واسعة من حيث أن له العديد من التطبيقات في الهندسة والفيزياء وعلوم الكمبيوتر والاقتصاد ومجالات أخرى. كما أنه يساهم في فهم أعمق للرياضيات نفسها. المصفوفات مستطيلة من الأرقام أو الوظائف ، والمتجهات هي الأدوات الرئيسية للجبر الخطي. المصفوفات مهمة لأنها تتيح لنا التعبير عن كميات كبيرة من البيانات والوظائف في شكل منظم وموجز. علاوة على ذلك ، نظرًا لأن المصفوفات عبارة عن كائنات مفردة ، فإننا نشير إليها بأحرف مفردة ونحسبها مباشرة. جعلت كل هذه الميزات المصفوفات والمتجهات شائعة جدًا للتعبير عن الأفكار العلمية والرياضية. يحتفظ الفصل بمزيج جيد .

المصفوفات والمتجهات Matrices and Vectors :

يتم تقديم المفاهيم والقواعد الأساسية للمصفوفة والجبر المتجه ويتبعها أنظمة خطية (أنظمة المعادلات الخطية) ، دعونا أولاً نلقي نظرة مترفة على المصفوفات قبل إضفاء الطابع الرسمي على مناقشتنا.

مفهوم المصفوفة Concept of Matrices :

تستخدم المصفوفات في معالجة كثير من النماذج سواء كانت رياضية او احصائية او هندسية , و تستخدم بشكل واسع في حل النماذج الاقتصادية عندما يكون عدد السلع الداخلة في النموذج الاقتصادي كبير, بمعنى اخر عندما يكون عدد المتغيرات المطلوب قياسها كبير جدا . وفي ضوء مما تقدم, يعد موضوع المصفوفات اسلوبا مبسطا في عرض وقياس المتغيرات التي تتضمنها مجموعة من المعادلات الخطية التي تشكل نظاما خطيا للمعادلات مرة واحدة.

كثيرا ما نتعامل في الرياضيات التطبيقية و الرياضيات النظرية مع مرتب من الاعداد يشكل مستطيل وهذا المستطيل يسمى مصفوفة Matrix و الاعداد المرتبة والتي تسمى بالعناصر Elements وقد جرت العادة استخدام الحروف الكبيرة للتعبير عن المصفوفات مثل A,B,C والحروف الصغيرة للتعبير عن العناصر مثل ....,a,b,c كما يتم استخدام الاقواس لحصر العناصر.

كما تعرف المصفوفات ايضا بانها تشكيل رياضي مكون من مجموعة من العناصر على هيئة صفوف و اعمدة محصورة بين قوسين , وتسمى العناصر التي تقع على الخطوط الافقية بالصفوف (Rows) او المتجهات الصفية (Rows Vectors) , بينما تسمى العناصر التي تقع على الخطوط العمودية (Columns) او المتجهات العمودية (Columns Vectors) . بمعنى اخر تعرف المصفوفة بأنها مجموعة من المتجهات الافقية و العمودية حيث يتم الاشارة الى المتجهات الافقية بعدد الصفوف (Rows) و المتجهات العمودية بعدد الاعمدة (Columns) .

اذن المصفوفة هي مجموعة مستطيلة من الأرقام أو الوظائف التي سنضعها بين قوسين. مثال على ذلك :

$$A=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{4x3}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان رمز المصفوفة اعلاه هو (A) او مختصر المصفوفة $\left[a_{ij}\right]$ بينما العناصر داخل المصفوفة كل منها يشير حسب موقعه حيث يرمز a_ij الى العنصر الواقع في الصف i و العمود j من المصفوفة A,

مع ملاحظة ان المصفوفة ليست كمية وانما تحتوي على مجموعة عناصر وهذا يعني بمجرد تغير احد

عناصرها فان المصفوفة تتغير. يسمى العددان m & n ببعدي المصفوفة و في حالة تساوي بعدي المصفوفة (m=n) يطلق على المصفوفة بالمربعة او المصفوفة المربعة من المرتبة n.

المتجهات Vectors:

المتجه عبارة عن مصفوفة تحتوي على صف أو عمود واحد من العناصر فقط ، فمتجه الصف Row vector يأخذ الشكل

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & . & . & a_n \end{bmatrix}$$

اما متجه العمود Column vector فيأخذ الشكل

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسي Main diagonal

هو كل عناصر المصفوفة، A_ij، التي تحقّق i=j, اما بالنسبة للمصفوفات المربعة، فإنّ القطر الرئيسي هو ذلك الذي يمتد من الزاوية اليسرى العليا إلى الزاوية اليمنى السفلى. على سبيل المثال المصفوفة الآتية، تحتوي على الرقم 1 في كل عناصر قطرها الرئيسي:

(تسمى بمصفوفة الوحدة ايضا و ستناولها لاحقا بالتفصيل)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

امّا بالنسبة للمصفوفات غير المربعة (أي المستطيلة)، فإنّ القطر الرئيسي يمر عبر الزاوية اليسرى العليا ولكل العناصر الموجودة إلى أسفل ويمين العنصر السابق، حتى الوصول إلى الطرف الأيمن أو الأسفل للمصفوفة. الأمثلة الآتية تظهر هذا الأمر، إذ أنّ العناصر التي تساوي 2 تشكل القطر الرئيسي في كِلْتا الحالتين:

(نلاحظ المصفوفة غير مربعة و ايضا تعتبر مصفوفة وحدة)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أمّا القطر المقابل للقطر الرئيسي فيدعى بالقطر الثانوي.

1-2 مرتبة المصفوفة Order of Matrix

و هي عبارة عن درجة او حجم او سعة المصفوفة , و نعني بسعة المصفوفة بأنها عبارة عن عدد صفوف المصفوفة في عدد اعمدتها.

مثلا :

إذا كان لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 3 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix} \quad , \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد ما يأتي:

1- مرتبة المصفوفات السابقة.

2- عدد عناصر كل مصفوفة (سعة المصفوفة).

الحل:

1 – مرتبة المصفوفات:

أ- مرتبة المصوفة A هي (2x2).

ب- مرتبة المصفوفة B هي (3x2).

جـ - مرتبة المصفوفة C هي (3x3).

2 – عدد عناصر كل مصفوفة:

أ- عدد عناصر المصفوفة A هي (4) عناصر.

ب- عدد عناصر المصفوفة B هي (6) عناصر.

جـ - عدد عناصر المصفوفة C هي (9) عناصر.

1-3 منقول او مبدلة المصفوفة Transpose of Matrix

وهي عبارة عن تبديل صفوف المصفوفة محل اعمدتها, بمعنى اخر سيصبح عدد صفوف المصفوفة

الاصلية مساو الى عدد الاعمدة في مبدلة المصفوفة و يرمز لها بالرمز `A^T or A^

اي : لو كانت لدينا المصفوفة A=[a_ij] من المرتبة (m*n) , فان منقولها او مبدلتها تكون بالشكل الاتي :

A^T=[a_ij]_m*n

انواع المصفوفات Types of Matrices

تكون المصفوفات أنواع عدة، نذكر منها ما يأتي:

1- المصفوفة الصفرية Null Matrix or Zero Matrix

و هي المصفوفة التي تكون عناصرها اصفار اي ان

$A_{ij}=0 \quad \forall\, i\, j$

$$A_{2\times 2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\quad , \quad O_{2\times 3}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\quad , B_{3\times 3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

2- المصفوفة المربعة Square Matrix

و هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الاعمدة ، اي ان (m=n)، مثال على ذلك :

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&-3\\-1&0&-2\\3&2&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}20&120&200\\120&10&150\\200&150&30\end{bmatrix}$$

3- مصفوفة الوحدة (المصفوفة الحيادية)Identity Matrix

وهي مصفوفة مربعة من مرتبة (n) ، جميع عناصرها اصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي تساوي

الواحد ، و تأخذ الرمز I_n اي ان :

$$\boxed{a_{ij}=\begin{cases}1 & , \quad i=j \quad , \quad i=1,2,\cdots,n\\ 0 & , \quad i\neq j\end{cases}}$$

وعلى ذلك فإن :

$$I_1=[1]=1 \quad , \quad I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad \cdots$$

4- المصفوفة المتماثلة Symmetric Matrix

و و هي عبارة عن مصفوفة مربعة التي يكون فيها عناصر الثلث العلوي مساوية لعناصر الثلث السفلي

وعلى هذا) $A=A^T$ (التماثل يعني لا يوجد اختلاف بين المصفوفة الرئيسية و المبدل لها اي ان

الغرار فان للتماثل شرط لا بد من تحقيقه :

$$a_{ij}=a_{ji} \quad \forall\ i,j$$

وعلى سبيل المثال فإن المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 5 & 1 & 8\\ 7 & 8 & 2\end{bmatrix}$$

فيها يكون $A=A^T$ وبالتالي فهي متماثلة .

5- المصفوفة المتماثلة بالسالب Skew-Symmetric

وهي مصفوفة مربعة ايضا و تحقق $(A^T=-A^T)$ و في ضوء ذلك فأن شرط التماثل بالسالب هو

$$a_{ij}=- a_{ji} , \qquad \forall \qquad i j$$

بالاضافة لذلك يجب ان تكون جميع عناصر القطر الرئيسي اصفار لتحقيق المصفوفة المتماثلة بالسالب .

وعلى سبيل المثال فإن المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متماثلة بالسالب ، بينما المصفوفة :

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ليست متماثلة بالسالب (لماذا ؟) .

6- المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

هي مصفوفات مربعة يمكن أن تحتوي على إدخالات غير صفرية فقط على القطر الرئيسي. يجب أن يكون أي إدخال أعلى أو أسفل القطر الرئيسي صفراً. مثال على ذلك

$$A_{2X2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow D=\text{diag}\ (1 \quad 2)$$

$$B_{3x3}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow D=\text{diag}(2 \quad 5 \quad 3)$$

7- المصفوفة المثلثية العليا Upper Triangular Matrix

وهي عبارة عن مصفوفة مربعة يمكن أن تحتوي على إدخالات غير صفرية فقط على القطر الرئيسي وفوقه ، بينما يجب أن يكون أي إدخال أسفل القطر صفرًا(بمعن اخر تكون قيمة عناصر المصفوفة اسفل القطر الرئيسي اصفار) مثال على ذلك :

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8- المصفوفة المثلثية السفلى Lower Triangular Matrix

وهي عبارة عن مصفوفة مربعة يمكن أن تحتوي على إدخالات غير صفرية فقط على القطر الرئيسي وأسفله (بمعنى اخر تكون قيمة عناصر الثلث العلوي الواقعة اعلى القطر الرئيسي اصفارا) مثال على ذلك :

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

9- المصفوفة العددية Numerical Matrix

وهي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع عناصر القطر الرئيسي متساوية ، اما العناصر الاخرى و الواقعة خارج القطر الرئيسي تكون اصفارا و يعد هذا النوع من المصفوفات حالة خاصة من المصفوفة القطرية

مثال ذلك :

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{3\times3} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

10- المصفوفة المفردة و غير المفردة Singular & Non-Singular Matrices :

لأى مصـفوفة مربعــة A مــن الدرجــة $(n \times n)$ ، يقـال إنهــا غير مفــردة إذا كان المحدد الذى درجته (n) لا يتلاشى ,

\\

إذا كان $|A| = Zero$ فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة مفردة.

\\

اما إذا كان $|A| \neq Zero$ فإن المصفوفة A غير مفردة .وتلعـب المصـفوفة غير المفـردة (singular-non) دوراً هامـاً فـي ايجـاد معكـوس المصفوفة.

الفصل الثاني

العمليات على المصفوفات

Matrix-Operations

العمليات الجبرية algebraic operations :

يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات ، ويشترط لجمع أو طرح المصفوفات أن تكون من نفس الدرجة على أن يتم جمع العناصر المتناظرة جمعاً جبرياً. أما في حالة ضرب المصفوفات فإن هذه العمليات تتطلب شرطا خاصا لكى تتم عملية الضرب.

أولاً : جمع وطرح المصفوفات Subtraction & Addition :

جمع المصفوفات matrix summation : كانت لدينا اذا المصفوفتان $A=[a_{ij}]$ and $B=[b_{ij}]$ من الدرجة $n*m$ و كانت $C=A+B$ فان C هي مصفوفة من الدرجة $n*m$ حيث $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$ لكل i,j.

بمعنى اخر : مجموع مصفوفتين هو مجموع العناصر المتقابلة .

خصائص الجمع

1- $A+B = B+A$

2- $A+(B+C)=(A+B)+C$

مثال: اذا كان

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 6\\ 5 & 1 & 8\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}7 & 9 & 4\\ 8 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

فأن

$$C=A+B=\begin{bmatrix}10 & 13 & 10\\ 13 & 2 & 9\end{bmatrix}$$

إذا كانت لدينا المصفوفات الآتية:

1) $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2) $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

المطلوب: جد المصفوفة الناتجة من حاصل جمع المصفوفتين A و B .

الحل:

1) $C_{2x2} = A_{2x2} + B_{2x2}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2) $C_{2x3} = A_{2x3} + B_{2x3}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال: افرض ان :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad , A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

فيكون

$$A + B = \begin{pmatrix} 6+4 & 3+(-1) & -1+8 \\ 0+(-2) & 5+(-3) & 2+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 2 & 7 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال : افراض ان :

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

في هذه الحالة لا يمكن اجراء عملية الجمع لان درجة A لا تساوي درجة المصفوفة B .

طرح المصفوفات Subtraction of Matrices :

يمكن الاعتماد على الاسلوب المستخدم في جمع المصفوفات , وعلى افتراض لدينا المصفوفتان $B=[b_{ij}]$ and $A=[a_{ij}]$ لهما نفس المرتبة $(n*m)$ فان حاصل طرحهما هو $C=A-B$ فان C هي مصفوفة من الدرجة $n*m$ حيث

$$C_{ij}=A_{ij} - B_{ij} \quad \forall \, i,j.$$

إذا كانت لدينا المصفوفات الآتية:

$$1)\ A_{2\times2}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{bmatrix} \quad ,B_{2\times2}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 8\end{bmatrix}$$

$$2)\ A_{3\times2}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix} \quad ,B_{3\times2}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد المصفوفة الناتجة من حاصل طرح المصفوفة B من المصفوفة A.

الحل:

$$1)\ C_{2\times2}=A_{2\times2}-B_{2\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$2)\ C_{3\times2}=A_{3\times2}-B_{3\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 3 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

ثانياً : ضرب المصفوفات Multiplication of Matrices

1- ضرب مصفوفة في ثابت Multiplication of a Matrix by a Scalar

الثابت هو (ليس مصفوفة) حيث يمكن ضرب أي مصفوفة بثابت فينتج مصفوفة اخرى عناصرها هي

عبارة عن مضروبات عناصر المصفوفة الاولى في الثابت أي ان :

اذا كانت المصفوفة $A=(a_{ij})$ من درجة $(n*m)$, لو افترضنا (C) اي ثابت فان

$AC = CA = ((C a_{ij}))$ من الدرجة $(n*m)$ ايضا .

$$CA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال : افرض ان

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4A = \begin{pmatrix} 24 & 12 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-2A = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

هناك حالات يستخرج ثابت من داخل المصفوفة وفي مثل هذه الحالة يجب قسمة جميع العناصر على ذلك الثابت.

مثال على ذلك :

$$\begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 24 & -12 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

مثال:

إذا كانت لديك المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix} \qquad ,k=3 \quad ,L=\frac{1}{2}$$

المطلوب:

جد $(L\,A\ ,\ k\,A)$.

الحل:

1) $kA=3A$

$$=3\begin{bmatrix}-4 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-12 & 18\\ 6 & 12\end{bmatrix}$$

2) $L\,A=\frac{1}{2}\,A$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

-2 ضرب مصفوفتين Multiplication of two Matrices

افرض ان A=(a_ij) من الدرجة n*m و B=((b_ij)) من درجة n*p و افرض ان C= AB فان C

مصفوفة من درجة M*P واذا فرضنا ان C = ((C_ij)) فتكون

C_{ij }= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ….. a_{in} b_{nj} \qqusd \forall \qquad ∀ I , j $

$

ويمكن التعبير عنها بالصيغة :

$$C_{IJ} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

ومن التعريف اعلاه نتوصل الى ان حاصل ضرب مصفوفتين لا يساوي مصفوفة حاصل ضرب العناصر المتقابلة وانما ضرب ضرب صفوف من الاولى في اعمدة من الثانية حيث تضرب كل الاعمدة ويتم ضرب الصف في العمود بأن يضرب العنصر الاول من الصف في العنصر الاول من العمود والثاني في الثاني و الثالث في الثالث ..... والاخير في الاخير وتجمع نواتج الضرب فيكون عنصر له موقع الصف المضروب والعمود المضروب ولكي يتعرف الضرب يجب ان تكون اعمدة المصفوفة الاولى مساوية لصفوف المصفوفة الثانية .

مثال:

إذا كانت لديك المصفوفتان الآتيتان:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\qquad ,\ B=\begin{bmatrix}3 & 0\\4 & 2\end{bmatrix}$$

ب:

جد المصفوفة $C = A\,B$.

$$\therefore C=A\,B$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 4\\13 & 2\end{bmatrix}$$

مثال:

إذا كانت لديك المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad , B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

المطلوب: جد ما يأتي:

AB (1   BA (2   AC (3   BC (4 A^2 (5

الحل:

1) AB

لا يمكن إجراء عملية ضرب المصفوفة A في المصفوفة B، وذلك لأن عملية الضرب غير متوافقة بسبب عدم تساوي عدد أعمدة المصفوفة A مع عدد صفوف المصفوفة B.

2)
$$BA=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(2)+2(-1) & 1(0)+2(3)\\ -3(2)+0(-1) & -3(0)+0(3)\\ 2(2)+4(-1) & 2(0)+4(3)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -6 & 0\\ 0 & 12\end{bmatrix}$$

3)
$$AC=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(2)+0(1) & 2(0)+0(3) & 2(-2)+0(2)\\ -1(2)+3(1) & -1(0)+3(3) & -1(-2)+3(2)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & 0 & -4\\ 1 & 9 & 8\end{bmatrix}$$

4)
$$BC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(2)+2(1) & 1(0)+2(3) & 1(-2)+2(2)\\ -3(2)+0(1) & -3(0)+0(3) & -3(-2)+0(2)\\ 2(2)+4(1) & 2(0)+4(3) & 2(-2)+4(2)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & 6 & 2\\ -6 & 0 & 6\\ 8 & 12 & 4\end{bmatrix}$$

5) $A^2=A.A$
$$=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(2)+0(-1) & 2(0)+0(3)\\ -1(2)+3(-1) & -1(0)+3(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -5 & 9\end{bmatrix}$$

قوانين الضرب : لو افترضنا ان A,B,C مصفوفات ملائمة للجمع و الضرب فتكون القوانين التالية خاصة بهذه العمليات :

1- $A(B+C) = AB + AC$

2- $(B+C)A = BA + CA$

3- $A(BC) = (AB)C$

4- **بعض القوانين الهامة :**

(i)	$A(B+C) = AB + AC$
(ii)	$(A+B)C = AC + BC$
(iii)	$A(BC) = (AB)C = ABC$
(iv)	$AB \neq BA$ (In general)
(v)	$kA = [ka_{ij}]$
(vi)	$k(A \pm B) = kA \pm kB$
(vii)	$(k_1 \pm k_2)A = k_1A \pm k_2A$
(viii)	$(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
(ix)	$I \cdot A = A \cdot I = A$
(x)	$O \cdot A = A \cdot O = O$

حيث k, k_1, k_2 ثوابت .

القوانين اعلاه تطابق القوانين في حالة الاعداد الحقيقية و هناك قوانين اخرى مخالفة و من هذه القوانين هي:

قانون التبديل لا ينطبق على المصفوفات اي ان المصفوفات غير قابلة للتبديل في حالة الضرب حيث ان $AB \neq BA$ بصورة عامة , قد تكون AB معرفة و BA غير معرفة و ان كانت المصفوفتان معرفتان فان درجة AB قد تختلف عن درجة BA و في حالة تشابهما في الدرجة فقد تختلفان في العناصر المتقابلة و يتضح من ذلك ان AB قد تساوي BA و ربما لا تساويها.

تساوي مصفوفتين : Equal Two Matrices

اذا كانت لدينا المصفوفتان$ A=[a_ij] and B=[b_ij] $

فأنه يقال على المصفوفات اعلاه متساويتين $ (A=B) $ اذا تحققت الشروط :

1- اذا وفقط اذا كانتا المصفوفات من نف س المرتبة (الدرجة).

2- كل عنصر من عناصر المصفوفة A يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة $ B $ اي ان :

b_ij = a_ij ∀ I , j

لو افترضنا لدينا المصفوفتان.

$$A_{2\times2}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{2\times2}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

وعلى افتراض ان $ (A=B) $, في هذه الحالة ينبغي ان تكون العناصر المتناظرة متساوية اي ان :

$$a_{11}=b_{11} \quad , a_{12}=b_{12}$$
$$a_{21}=b_{21} \quad , a_{22}=b_{22}$$

خصائص التساوي:

التساوي يشكل علاقة بين المصفوفات بشكل علاقة و هذا العلاقة تتصف بالخصائص التالية:

1- علاقة التساوي علاقة انعكاسية (Reflexive) اي ان $ A=A $ لكل مصفوفة$ A $.\\

2- علاقة التساوي علاقة تماثلية (Symmetric) اي ان لكل A,B مصفوفة اذا كانت $A= B$

فان $B = A$ \\.

3- علاقة التساوي علاقة متعدية (Transitive) اذا كانت $A= B$, $B = C$ فان $A= C$ لكل

A,B,C مصفوفة .\\

مثال / اذا كان لدينا المصفوفات الاتية:

1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2) $C=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} \sqrt{9} & 25 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

3) $E=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

المطلوب:

هل تُعد المصفوفات (A,B) و (C,D) و (E,F) متساوية؟ معللاً ذلك؟

الحل:

(1) $A \neq B \Leftarrow$ لأن $(a_{11} \neq b_{11})$.

(2) $C = D \Leftarrow$ لأن العناصر المتناظرة متساوية للمصفوفتين، ولكونهما من نفس المرتبة (الدرجة).

(3) $E \neq F \Leftarrow$ لاختلاف مرتبة (درجة) المصفوفتين، حيث إن مرتبة المصفوفة E هي (2x2)، ومرتبة المصفوفة F هي (2×3).

مثال: اذا كان لدينا المصفوفتان :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & x+y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-2y & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

على اعتبار ان المصفوفات اعلاه متساوية جد قيمة x , y ؟

الحل:

$$\left.\begin{array}{ll} x-2y=3 & \dots(1) \\ x+y=6 & \dots(2) \bullet 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x-2y=3 \\ \underline{2x+2y=12} \\ 3x=15 \Rightarrow \boxed{x=5} \end{array}$$

F4

مثال (4):

إذا كان لدينا المصفوفتان الآتيتان:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3X-Y \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad , B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 2X+Y & 6 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

على إعتبار إن المصفوفتين A و B متساويتان، جد قيمة المجاهيل (X و Y).

الحل:

$$\because A=B$$

$$\therefore 3X-Y=7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

بالجمع $2X+Y=3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$$5X=10$$

$$\therefore X=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض قيمة (X=2) في إحدى المعادلتين (1) أو (2)، ولتكن المعادلة (1)، نحصل على قيمة (Y) كالآتي:

$$3(2)-Y=7$$

$$\therefore Y=6-7$$

$$\therefore Y=-1$$

١-٢-٧ قسمة المصفوفات *Division of Matrices*

إبتداءً ؛ فإنه لا وجود لقسمة مصفوفة على مصفوفة . فالعملية $\frac{A}{B}$ غير موجودة ولكن إذا ما كانت B^{-1} موجودة فإن العملية AB^{-1} أو $B^{-1}A$ هي المُعرفة في المصفوفات . وعلى هذا الأساس إذا أردنا حل المعادلة $Ax=b$ للمجهول x فإنه إذا كانت A^{-1} موجودة ، فإن $x=A^{-1}b$ وذلك بالضرب (من اليسار) في A^{-1} واستعمال $A^{-1}A=I$.

١-٢-٩ مُدَوّر المصفوفة *Matrix Transpose*

إذا كان $A_{n\times m} = [a_{ij}]$ فإن مُدَوّر المصفوفة هي المصفوفة الناتجة من جعل الصفـــوف أعمـــدة والأعمدة صفوف .. أي هي المصفوفة

$$\boxed{A^T_{m\times n} = [a_{ji}]}$$

ويجب التنويه هنا أن هذه العملية لا تؤثر في قيمة المحدد (وسيأتي تعريفه لاحقاً) ..أي أن :

$$\boxed{|B^T| = |B|}$$

وذلك للمصفوفة المربعة . كذلك يمكن التأكد من صحةالقوانين التالية :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \\ \text{(ii)} & (A^T)^T = A \\ \text{(iii)} & (kA)^T = kA^T \quad , \quad k = \text{scalar} \\ \text{(iv)} & (AB)^T = B^T A^T \end{array}}$$

٣ ـ ١ مبدلة المصفوفة **:The Transpose of a Matrix**

المصفوفة المستخرجة من المصفوفة A من درجة mxn بتبديل صفوفها باعمدتها تسمى مبدلة A ويرمز لها A′ .
اي اذا كانت $A = ((a_{ij}))$ من درجة mxn .
فان $A' = ((a_{ji}))$ من درجة nxm .

مثال (١ ـ ١) افرض ان
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

فيكون
$$A' = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

قوانين المبدلة : لو فرضنا ان كل من B,A مصفوفة قابلة للجمع والضرب ، وان α ثابت فان

$1.\ (A')' = A \quad , \quad 2.\ (\alpha A)' = \alpha A'$
$3.\ (A + B)' = A' + B' \ , 4.\ (AB)' = B'A'$

وفيما يلي، أهم خواص منقول المصفوفة:

$A_{m\times n}=[a_{ij}]$ ، $B_{m\times n}=[b_{ij}]$ ، $C_{n\times m}=[c_{ij}]$

عليه فإن:

1) $(A^T_{m\times n})^T = A_{m\times n}$

2) $(A_{m\times n} \mp B_{m\times n})^T = A^T_{m\times n} \mp B^T_{m\times n}$

3) $(A_{m\times n} * C_{n\times m})^T = C^T_{n\times m} * A^T_{m\times n}$

وفيما يلي، بعض الأمثلة التطبيقية حول منقول المصفوفة والخاصية الأولى فقط، وسيترك توضيح الخاصتين (2) و (3) في الفقرات اللاحقة.

مثال (5):

إذا كان لدينا المصفوفتان الآتيتان:

$$A_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} \quad , \quad B_{2\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

المطلوب: جد ما يأتي:

1 – منقول المصفوفة A^T والمصفوفة B^T.

2 – إثبت أن:

$$(B^T_{3\times 2})^T = B_{2\times 3}$$

الحل:

1) $$A^T_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

$$B^T_{3\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

2) $$\therefore \left(B^T_{3\times 2}\right)^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \left(B^T_{3\times 2}\right)^T = B_{2\times 3}$$

X-6- Assume $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix}$ *and* $B=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ 5 & 4 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$, show that:-

1) A *is symmetric matrix* 2) $(A+B)' = A' + B'$

3) $(AB)' = B'A'$

Sol.-

$$1)\ A' = \begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix} = A \Rightarrow A \text{ is a symmetric matrix.}$$

$$2)\ L.H.S. = (A+B)' = \begin{bmatrix}7 & 1 & 5\\ 7 & 3 & 7\\ 7 & 5 & -1\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}7 & 7 & 7\\ 1 & 3 & 5\\ 5 & 7 & -1\end{bmatrix}$$

$$R.H.S. = A' + B' = \begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 5 & 2\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 7 & 7\\ 1 & 3 & 5\\ 5 & 7 & -1\end{bmatrix} = L.H.S.$$

$$\therefore (A+B)' = A' + B'$$

$$3)\ L.H.S. = (AB)' = \begin{bmatrix}32 & 10 & 1\\ 11 & -2 & -7\\ 40 & 11 & 12\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}32 & 11 & 40\\ 10 & -2 & 11\\ 1 & -7 & 12\end{bmatrix}$$

$$R.H.S. = B'A' = \begin{bmatrix}4 & 5 & 2\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}32 & 11 & 40\\ 10 & -2 & 11\\ 1 & -7 & 12\end{bmatrix} = L.H.S.$$

$$\therefore (AB)' = B'A'$$

<u>المحددات</u>

ان لكل مصفوفة مربعة A من الدرجة $(n*n)$, هناك عدد حقيقي يسمى بمحددة المصفوفة, ويرمز لها بالرمز |A| و تكنب بالشكل الاتي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

من اعلاه يتضح بان عناصر المحددة |A| يتم حصرها بمستقيمات عمودية | | للدلالة عن محددة المصفوفة A:

وفيما يلي توضيح الآلية التي يتم بموجبها إيجاد محددة المصفوفة من الدرجة (2x2)، ومحددة المصفوفة (3×3)، وعلى النحو الآتي:

2-4-1: إيجاد محددة المصفوفة من الدرجة (2x2):

بإفتراض لدينا المصفوفة A من الدرجة (2x2)، عليه تكون محددة المصفوفة |A| كالآتي:

$$\because A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

مثال (13):

إذا كان لديك المصفوفات الآتية:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad 2)\ B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد محددة المصفوفة |A| ومحددة المصفوفة |B|.

الحل:

$$1)\ |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 3(4) - 1(2)$$
$$= 12 - 2$$
$$= 10$$

$$2)\ |B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 4(3) - 5(6)$$
$$= 12 - 30$$
$$= -18$$

نظرية:

عندما يكون (|A|=0)، ففي هذه الحالة تسمى المصفوفة A بالمصفوفة المتفردة (Singular Matrix).

مثال ذلك:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(1) = 4 - 4 = \text{Zero}$$

$\therefore$ A is Singular Matrix.

2-4-2: إيجاد محددة المصفوفة من الدرجة (3x3):

لإيجاد محددة المصفوفة من الدرجة (3x3)، نقوم باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين:

أولاً: طريقة الأسهم:

بافتراض لدينا المصفوفة A من الدرجة (3x3)، عليه يمكن إيجاد محددة المصفوفة |A| بموجب هذه الطريقة وفقاً للخطوات التالية:

1 – نقوم بوضع العمودين الأول والثاني إلى يمين محددة المصفوفة.

2 – نقوم بتكوين ثلاثة أقطار رئيسية، بعد ذلك يتم ضرب عناصر كل قطر مع بعضها، وإيجاد حواصل ضرب العناصر للأقطار الثلاثة.

3 – تكوين ثلاثة أقطار ثانوية، بعد ذلك يتم ضرب عناصر كل قطر مع بعضها، وإيجاد حواصل ضرب العناصر للأقطار الثلاثة.

4 – إيجاد حاصل طرح ناتج الخطوة (3) من ناتج الخطوة (2).

ولتوضيح الخطوات السابقة، دعنا نسوق المثال الآتي:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

مثال (14):

إذا كانت لديك المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

المطلوب: إحسب محددة المصفوفة |A|، باستخدام طريقة الأسهم.

الحل:

يمكن حساب محددة المصفوفة |A|، باستخدام طريقة الاسهم كالآتي:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 5 & 4 & 7 \end{array}\right.$$

$$= [3(2)(5)+(-1)(3)(4)+1(0)(7)] - [1(2)(4)+3(3)(7)+(-1)(0)(5)]$$

$$= 30[-12+0] - (8+63+0)$$

$$= 18-71$$

$$= -53$$

ثانياً: الطريقة العامة (طريقة المحيددات):

تُعد طريقة المحيددات (Minors) من الطرق العامة لإيجاد قيمة المحددة مهما كانت درجة (مرتبة) المصفوفة المربعة كأن تكون من الدرجة الثانية (2x2) أو الثالثة (3x3) أو الرابعة (4x4) أو أي درجة أخرى.

ولتوضيح آلية إيجاد محددة المصفوفة المربعة بموجب هذه الطريقة، دعنا نفترض المصفوفة المربعة A من درجة (3x3) التي تأخذ الشكل الآتي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولايجاد محددة المصفوفة $|A|$ بموجب طريقة المحيددات، نتبع الخطوات الآتية:

1- توزيع الاشارات لكل عنصر من عناصر المصفوفة A بشكل تبادلي، على النحو الآتي:

$$A=\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

2- إختيار أحد صفوف المصفوفة أو أحد اعمدتها، لغرض الحصول على محددة المصفوفة $|A|$.

وفي ضوء الخطوات السابقة، يمكن الحصول على محددة المصفوفة $|A|$، بعد إختيار الصف الأول مثلاً:

$$|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

مثال (15):

إذا كانت لديك المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

إحسب محددة المصفوفة $|A|$، باستخدام الطريقة العامة.

الحل:

لايجاد محددة المصفوفة $|A|$ بموجب الطريقة العامة (طريقة المحيددات)، نقوم باختيار الصف الأول، أي إن:

$$|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$
$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 3(10-21) + 1(0-12) + 1(0-8)$$
$$= 30 - 63 + 0 - 12 + 0 - 8$$
$$= -53$$

مثال (16):

إذا كانت لديك المصفوفة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 12 & 4 & 10 \\ 16 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد قيمة محددة المصفوفة |A| باستخدام:

1- طريقة الأسهم.

2- طريقة المحيددات.

الحل:

1- إيجاد محددة المصفوفة |A|، باستخدام طريقة الاسهم:

$$|A| = \left|\begin{matrix} 2 & 4 & 8 \\ 12 & 4 & 10 \\ 16 & 0 & 2 \end{matrix}\right. \begin{matrix} 2 & 4 \\ 12 & 4 \\ 16 & 0 \end{matrix}$$

$$= [2(4)(2) + 4(10)(16) + 8(12)(0)] - [8(4)(16) + 2(10)(0) + 4(12)(2)]$$
$$= [16 + 640 + 0] - [512 + 0 + 96]$$
$$= 656 - 608$$
$$= 75$$

2- إيجاد محددة المصفوفة |A|، باستخدام طريقة المحيددات:

لايجاد محددة المصفوفة |A| بموجب هذه الطريقة، نقوم باختيار الصف الأول.

أي إن:

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\
&= 2\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 12 & 10 \\ 16 & 2 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 16 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2(8-0) - 4(24-160) + 8(0-64) \\
&= 16 - 4(-136) + 8(-64) \\
&= 16 + 544 - 512 \\
&= 560 - 512 \\
&= 48
\end{aligned}
$$

3-4-2 ، خواص المحددات:

فيما يلي أهم خواص المحددات، والتي يمكن الاستفادة منها في بعض تطبيقات المصفوفات:

1 – إن محددة مصفوفة الوحدة (المصفوفة الحيادية) تساوي الواحد الصحيح، أي إن:

$$|I_n| = 1$$

مثال (17):

جد محددة مصفوفة الوحدة (I_2) الآتية:

$$|I_2| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= 1(1) - 0(0) \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

2- إن محددة المصفوفة القطرية تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة.

مثال (18):

جد محددة المصفوفة القطرية ($A_{3\times3}$) الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A|=2(3)(4)$$
$$=24$$

3- إن محددة المصفوفة المثلثية (السفلى أو العليا) تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة.

مثال (19):

جد محددة المصفوفات المثلثية الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\1&2&0\\3&-1&1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&4&2\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

الحل:

$$1)\ |A|=4(2)(1)$$
$$=8$$
$$2)\ |B|=3(4)(-3)$$
$$=-36$$

4- إن محددة المصفوفة A تساوي محددة مبدلتها (A^T)، أي إن:

$$|A|=|A^T|$$

مثال (20):

إذا كانت لديك المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}3&4\\1&-2\end{bmatrix}$$

المطلوب: إثبت إن ($|A|=|A^T|$)

الحل:

$$|A| = 3(-2) - 4(1)$$
$$= -6 - 4$$
$$= -10$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A^T| = 3(-2) - 1(4)$$
$$= -6 - 4$$
$$= -10$$

$$\therefore |A| = |A^T|$$

5- إن محددة حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين يساوي حاصل ضرب محددتي المصفوفتين، أي إن:

$$|AB| = |A||B|$$

مثال (21)

إذا كانت لديك المصفوفتين الآتيتين:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

إثبت إن ($|AB|=|A||B|$).

الحل:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = 5(14) - (-6)(7)$$
$$= 70 + 42$$
$$= 112$$

$$|A| = 1(2) - (-2)(3)$$
$$= 2 + 6$$
$$= 8$$

اذا

$|B|=3(4)-2(-1)$
$=12+2$
$=14$
$|A||B|=8(14)$
$=112$
$\therefore |AB|=|A||B|$

6- إذا تساوت عناصر صفان أو (عمودان) في المصفوفة A، فان محددة المصفوفة تساوي (صفر)، أي ان:

$|A|=0$

مثال (22):

جد محددة المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$1)\ |A| = 3(4)-4(3)$$
$$=12-12$$
$$=0$$
$$2)\ |B| = 1\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=1[5(3)-6(2)]-2[4(3)-6(1)]+3[4(2)-5(1)]$$
$$=1(15-12)-2(12-6)+3(8-5)$$
$$=3-12+9$$
$$=12-12$$
$$=0$$

7- إذا كان أحد الصفوف أو أحد (الاعمدة) في المصفوفة A، من مضاعفات صف آخر أو عمود آخر، فان محددة المصفوفة تساوي (صفر)، أي إن:

$|A|=0$

مثال (23):

جد محددة المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{aligned} A &= 6(-2)-(-1)(12) \\ &= -12+12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

8- عند إستبدال صف محل صف آخر، او عمود محل عمود آخر في مصفوفة معينة، فان إشارة محددتها ستتغير.

مثال (24):

إذا كانت لديك المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

إثبت إن ($|B|=-|A|$)

الحل:

$$\begin{aligned} |A| &= 3(4)-2(1) \\ &= 12-2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

نقوم بإبدال العمود الثاني محل العمود الأول، كما موضح في المصفوفة B الآتية:

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |B| &= 2(1)-3(4) \\ &= 2-12 \\ &= -10 \\ &= -|A| \end{aligned}$$

$$\therefore |B|=-|A|$$

9- إذا كانت جميع عناصر احد الصفوف او احد (الأعمدة) في المصفوفة A تساوي (صفراً)، فان محددة المصفوفة تساوي (صفر)، اي إن:

$$|A|=0$$

مثال (25):

جد محددة المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{aligned} |A| &= 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2[3(0)-0(5)]-1[(-1)(0)-0(4)]+0[(-1)(5)-3(4)] \\ &= 2(0-0)-1(0-0)+0(-5-12) \\ &= 2(0)-1(0)+0(-17) \\ &= 0 \end{aligned}$$

10- إذا كانت المصفوفة A مصفوفة مربعة من درجة (n x n)، وإن k يمثل اي عدد حقيقي، فان:

$$|kA|=k^n|A|$$

مثال (26):

إذا توفرت لديك المعلومات الآتية:

$$A_{2\times2}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad ,k=4$$

المطلوب:

أثبت إن $\left[|4A|=4^2|A|\right]$.

الحل:

$$4A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$|4A| = 4(16) - 12(8)$$
$$= 64 - 96$$
$$= -32$$

$$4^2 |A| = 16 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 16[1(4) - 3(2)]$$
$$= 16[4 - 6]$$
$$= 16(-2)$$
$$= -32$$
$$\therefore |4A| = 4^2 |A|$$

11- عند ضرب عناصر أحد الصفوف أو أحد (الأعمدة) في مصفوفة معينة بعدد ثابت وليكن (k)، وثم باضافة عناصر ذلك الصف أو (العمود) إلى العناصر المناظرة لها في صف أو (عمود) آخر، فاننا سنحصل على محددة المصفوفة الجديدة مساوية إلى محددة المصفوفة الاصلية.

مثال (27):

إذا توفرت لديك المعلومات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad k = 2$$

المطلوب:

إثبت إن محددة المصفوفة الجديدة [illegible] تساوي محددة المصفوفة الأصلية (A).

الحل:

نقوم بضرب العمود الثاني بـ ($k = 2$) ويتم إضافته للعمود الاول، سنحصل على مصفوفة جديدة هي:

$$B=\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |B| = 9(4) - 2(11)$$
$$= 36 - 22$$
$$= 14$$
$$|A| = 5(4) - 2(3)$$
$$= 20 - 6$$
$$= 14$$
$$\therefore |B| = |A|$$

12- عند ضرب عناصر أحد الصفوف أو أحد (الأعمدة) في مصفوفة معينة بعدد ثابت وليكن (k)، فاننا سنحصل على محددة المصفوفة مضروبة بالعدد الثابت (k).

مثال (28):

إذا توفرت لديك المعلومات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad ,k=6$$

المطلوب:

إثبت إن $|B| = 6|A|$

الحل:

نقوم بضرب عناصر العمود الاول بـ($k = 6$)، سنحصل على مصفوفة جديدة هي:

$$B=\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -18 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |B| = 12(5) - 1(-18)$$
$$= 60 + 18$$
$$= 78$$
$$|A| = 2(5) - 1(-3)$$
$$= 10 + 3$$
$$= 13$$
$$\therefore 6|A| = 6(13)$$
$$= 78$$
$$\therefore |B| = 6|A|$$

المصفوفة المرافقة: Adjoint Matrix

لتكن (A) مصفوفة مصفوفة المرافقة ل (A) ويرمز لها بالرمز (adj A) .

اذا كان عنصرها في الصف (i) العمود (j) يمثل العامل المتمم للعنصر بالصف (j) والعمود (i) للمصفوفة (A) .

EX: find adj A for the following matrix:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 3\times 3$$

Sol:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +(6-0) = 6$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(0-28) = 28$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = +(0-12) = -12$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(4+0) = -4$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = +(-2+20) = 18$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0-8) = +8$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = +(14+15) = 29$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -(-7+0) = 7$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = +(-3-0) = -3$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 29 \\ 28 & 18 & 7 \\ -12 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

2- 5 Adjoint Of Matrix — العامل المصاحب للمصفوفة

Def :- If A square matrix then the transpose of the matrix of cofactor of A is called the Adjoint of A , i.e **(adj(A) = (cof(A))^T =(Aij)^T**

$$\text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T = \begin{pmatrix} A11 & A21 & \dots\dots\dots & An1 \\ A12 & A22 & \dots\dots\dots & An2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A1n & A2n & \dots\dots\dots & Ann \end{pmatrix}$$

Ex : -

Let $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, Find adj (A)

Sol :- **الحل :-** (1) نجد العامل المرافق (cof (A))
(2) ثم نجد المنقول له لكي نحصل على العامل المصاحب (adj (A)) وكما يلي :

$$\text{Cof}(a_{11}) = A_{11} = (-1)^{1+1} \quad M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3-2) = -5$$

$$\text{Cof}(a_{12}) = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\ (6-1) = -5$$

$$Cof(a_{21}) = A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-3-0) = 3$$

$$Cof(a_{22}) = A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (+1)(9-0) = 9$$

$$Cof(a_{23}) = A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(6+1) = -7$$

$$Cof(a_{31}) = A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (+1)(-1-0) = -1$$

$$Cof(a_{32}) = A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(3-0) = -3$$

$$Cof(a_{33}) = A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (+1)(-3+2) = -1$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = (cof(A))^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

Exc : - (1)

Let $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1/4 & 5 \\ 1 & 0 & 2/4 \end{pmatrix}$ **, Find adj (A)**

2-4 Cofactor Expansion & Applications   النشر بواسطة العامل المرافق

Def :- **The Cofactor of square matrix A is (cof(A) = Aij = $(-1)^{i+j}$ M ij**

ملاحظة :-

لتكن A= (aij) مصفوفة ذات سعة n*n ولتكن Mij مصفوفة جزئية من المصفوفة A ذات السعة (n – 1) * (n – 1) والتي حصلنا عليها بعد حذف الصف i والعمود j
يقال لمحدد Mij بانه مصفر العنصر aij من المصفوفة A

Ex : - (1)

$$\text{Let } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{, Find cof (A)}$$

Sol:

ملاحظة :-

عند ايجاد العامل المرافق للمصفوفة A يجب ان نجد العامل المرافق لكل عنصر عناصر من المصفوفة وكما يلي

$$\mathrm{Cof}(0) = A_{11} = (-1)^{1+1}\left|M_{11}\right| = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1(-16-3) = -19$$

$$\mathrm{Cof}(1) = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-12-2) = 14$$

$$\mathrm{Cof}(2) = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (+1)(-9+8) = -1$$

$$\mathrm{Cof}(3) = A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(0+2) = -2$$

$$\mathrm{Cof}(4) = A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (+1)(0+4) = 4$$

$$\mathrm{Cof}(-1) = A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(0+2) = -2$$

$$\mathrm{Cof}(-2) = A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (+1)(-1-8) = -9$$

$$\mathrm{Cof}(-3) = A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(0-6) = 6$$

$$\mathrm{Cof}(-4) = A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (+1)(0-3) = -3$$

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 14 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Exc : -(1)

Let $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1/2 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}$, **Find cof (A)**

4- معكوس المصفوفة Inverse Matrix

يمكن إيجاد معكوس المصفوفة بإحدى الطرق الآتية- 1 : باستخدام المحددات- 2 .طريقة جاوس- 3 - .طريقة العمليات المختصرة على الصفوف- 4 .طريقة العوامل المرافقة- 5 .طريقة التقسيم .وجميــع هــذه الطــرق المســتخدمة فــى إيجــاد معكــوس المصــفوفة تؤدي الى نفــس النتيجـة.

((إيجاد معكوس مصفوفة مربعة باستخدام طريقة المرافقة الثنائية))

المرافقة الثنائية للمصفوفة المربعة A :- هي المبدلة لمصفوفة مرافقات عناصر A ورمزها adj A اي اذا كانت A= ((aij)) من درجة n فأن adj A= ((∝ ji ∝ ij))))=((

حيث ∝ij مرافقة العنصر aij .

لتكن $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

فان $adj\ A = \begin{pmatrix} \propto_{11} & \propto_{21} \\ \propto_{12} & \propto_{22} \end{pmatrix}$

حيث:

$\propto_{11}=(-1)^{1+1}\ (a_{22})=a_{22}$

$\propto_{22}=(-1)^{2+2}(a_{11})=a_{11}$

$\propto_{12}=(-1)^{1+2}(a_{21})=-a_{21}$

$\propto_{21}=(-1)^{2+1}(\propto_{12})=-a_{12}$

$\therefore \text{adj } A= \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

ويكون معكوس المصفوفة هو $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$

حيث $|A| \neq 0$

لنفرض ان مبدلة مصفوفة مرافقات عناصر A هي $B = \begin{pmatrix} \propto_{11} & \propto_{12} & \propto_{13} \\ \propto_{21} & \propto_{22} & \propto_{23} \\ \propto_{31} & \propto_{32} & \propto_{33} \end{pmatrix}$

الحل/

اولاً: نجد عناصر مصفوفة المرافقات

$$\propto_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

$$\propto_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$\propto_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$$\propto_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$\propto_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$\propto_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\propto_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22$$

$$\propto_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$\propto_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$\propto_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 17 & -10 & 8 \\ -3 & -3 & -3 \\ 22 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

ثانياً: نجد مبدلة مصفوفة المرافقات B وتمثل adj A

أي ان $$B^T = adj\ A = \begin{pmatrix} 17 & -3 & 22 \\ -10 & -3 & -5 \\ 8 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

والمعكوسة لـ A هي: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$

حيث $|A| = -27$

مثال١//

فالمرافقة الثنائية لـ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ هي $Adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = 4-3 = 1 \quad \rightarrow \therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

مثال ٢// أوجد A^{-1} اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-27} \begin{pmatrix} 17 & -3 & 22 \\ -10 & -3 & -5 \\ 8 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

تمرين / اوجد معكوس المصفوفة الاتية :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

معكوس المصفوفة Invers of matrix

لتكن (A) مصفوفة تربيعية او مربعة ذات رتبة nxn قابلة للعكس اذا وجدت مصفوفة مربعة (B) بحيث ان AB=BA=In ويرمز لمعكوس المصفوفة A يقرأ A invers ويمكن ان يستخرج من القانون التالي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$|A| \neq 0$ بشرط

EX: find A^{-1} (invers of A) for the Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Sol

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2^{+} & 0^{-} & -1^{+} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 0 - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 10 - 1 \qquad |A| = 9$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = +4$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 4 & -8 & -7 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 4 & -8 & -7 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

#استخدام معكوس المصفوفة في حل المعادلات الخطية:-

١- في حالة عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل (المتغيرات) في هذة الحالة نستخدم القانون التالي لحل المعادلات

$X = A^{-1} B$

حيث ان X تمثل قيمة المتغيرات (المجاهيل)

A تمثل مصفوفة المعادلات

B تمثل متجه القيم المطلقة (الثوابت)

EX8: Solve the following system of equations by using the inverse of matrix:

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 9$$
$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 6$$
$$3X_1 + X_2 + 2X_3 = 8$$

Sol $X = A^{-1} B$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right|$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 8 + 27 + 1 - 6 - 6 - 6$$
$$= 36 - 18 = 18$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1) - 3(-7) + 1(-5)$$

$$= 2 + 21 - 5$$

$$|A| = 18$$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3×3 [illegible] 3×1

$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{18} \\ \frac{29}{18} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{35}{18}$$

$$x_2 = \frac{29}{18}$$

$$x_3 = \frac{5}{18}$$