Derivatives

The derivative of the function $y = f(x)$ **is the function** $y' = f'(x)$ **Whose value at each** x **is define by rule** $y = f(x) \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)}{\Delta x} = y' = f'(x)$

The Rules for Derivative

1	If $y = b \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = o$ where b is constant	$y = a^4 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$
2	If $y = x^n \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ n any number	$y = x^{-2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$
3	If $y = bx^n \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = b.nx^{n-1}$	$y = 4.\sqrt[3]{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 4.\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{4}{3.\sqrt[3]{x^2}}$
4	If $y = u(x) + v(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	$y = 2x^2 + 8 - 5x^4 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 4x + 0 - 20x^3$
5	If $y = b[u(x)]^n \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = b.n[u(x)]^{n-1}.\dfrac{du}{dx}$	$y = 3(2x^2 - x + 4)^7 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3.7(2x^2 - x + 4)^6.(4x-1)$
6	If $y = u(x).v(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = u(x).\dfrac{dv}{dx} + v(x).\dfrac{du}{dx}$	$y = (x^2+1)(x-3)^2$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = (x^2+1)[2(x-3)] + (x-3)^2(2x)$
7	if $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v(x).\dfrac{du}{dx} - u(x).\dfrac{dv}{dx}}{[v(x)]^2}$	$y = \dfrac{(x^2+1)^2}{(3x^2-2x+6)^2}$ 

Derivative

Trigonometric Functions	Hyperbolic Trigonometric Function
$y=\sin(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\cos(u).u'$	$y=\sinh(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\cosh(u).u'$
$y=\cos(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\sin(u).u'$	$y=\cosh(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sinh(u).u'$
$y=\tan(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sec^2(u).u'$	$y=\tanh(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\operatorname{sech}^2(u).u'$
$y=\cot(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\csc^2(u).u'$	$y=\coth(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\operatorname{csch}^2(u).u'$
$y=\sec(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sec(u)\tan(u).u'$	$y=\operatorname{sech}(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\operatorname{sech}(u)\tanh(u).u'$
$y=\csc(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\csc(u)\cot(u).u'$	$y=\operatorname{csch}(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\operatorname{csch}(u)\coth(u).u'$

Partial derivatives

The partial derivative is used in vector calculus and differential geometry. In Mathematics, sometimes the function depends on two or more variables. Here, the derivative converts into the partial derivative since the function depends on several variables. We will learn about the definition of partial derivatives, their formulas, partial derivative rules such as chain rule, product rule, quotient rule with more solved examples.

Function of Two or More Independent Variables and Their Derivatives:

لتكن (f) دالة بمتغيرين مستقلين (x,y) فإذا بقيت قيمة (y) ثابتة في f(x,y) تصبح (f) دالة بمتغير مستقل واحد (x). ويمكن أشتقاقها بالنسبة الى (x) بإعتبار (y) ثابت يسمى هكذا أشتقاق أشتقاقاً جزئياً للدالة *f(x,y)* بالنسبة لـ *(x)*. والمشتقة الجزئية لـ *(x)* يرمز لها بالرمز (f_x) أو $(\frac{\partial f}{\partial x})$.

تتم عملية الأشتقاق بالسماح لأحد المتغيرات أن تتغير ونترك المتغيرات الأخرى ثابتة أي نشتق جزئياً لمتغير واحد ونجعل المتغيرات الأخرى ثابتة.

Example 1: Find $(\frac{\partial f}{\partial x})$ and $(\frac{\partial f}{\partial y})$ if $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$.

Sol. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x - y$ and $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - x + 2y$

Example 2: Find $f_{x,}, f_y, f_u, f_v$ if $f(x,y,u,v) = \frac{x^2+y^2}{u^2+v^2}$.

Sol. $f_x = \frac{2x}{u^2+v^2}$ $f_y = \frac{2y}{u^2+v^2}$

$$f_u = \frac{(u^2+v^2)(0) - (x^2+y^2)(2u)}{(u^2+v^2)^2} = \frac{-2u(x^2+y^2)}{(u^2+v^2)^2}$$

$$f_v = \frac{(u^2+v^2)(0) - (x^2+y^2)(2v)}{(u^2+v^2)^2} = \frac{-2v(x^2+y^2)}{(u^2+v^2)^2}$$

Example 3: Find $f_{x,}, f_y, f_z, f_w$ if $f(x,y,z,w) = x^2 e^{2y+3z} \cos(4w)$.

Sol. $f_x = 2xe^{2y+3z} \cos(4w)$, $f_y = 2x^2 e^{2y+3z} \cos(4w)$

$f_z = 3x^2 e^{2y+3z} \cos(4w)$ and $f_w = -4x^2 e^{2y+3z} \sin(4w)$

Example 4: Find $f_{x,}, f_y$ if $f(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$.

Sol. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_x - -2e^{-2y} \sin 2x$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_x = -2e^{-2y}\cos 2x$$

Example 5: Find $f_{x,}, f_y, f_z$ if $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Sol. $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}} * (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}} * (2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = f_z = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}} * (2z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

The Chain Rule

(1) إذا كانت w دالة قابلة للأشتقاق في x أي أن w=f(x) وكانت x دالة قابلة للأشتقاق في t عندئذٍ مشتقتها تعطى بـ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$$

(2)إذا كانت w=f(x,y) دالة في متغيرين مستقلين x و y وان لهذه الدالة مشتقات جزئية مستمرة f_x و f_y واذا كانت x و y دالتين قابلتين للأشتقاق في المتغير المستقل t اي أن x=x(t) و y=y(t) فعندئذٍ تكون w دالة قابلة للأشتقاق في t ومشتقتها تعطى بـ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Example: Use the chain rule to find the derivative of $f(x,y) = xy$ with respect to (t) along the path $x = \cos t\,, y = \sin t$. what is the value of the derivative at $t = \pi$?

Sol.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t)$

$= -\sin^2 t + \cos^2 t$

$= -\frac{1}{2}(1 - \cos 2t) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$

$= \cos 2t$

$\therefore \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=\pi} = \cos 2\pi = 1$

(3) إذا كانت w=f(x,y,z) دالة في متغيريرات مستقلة x، y و x وان لهذه الدالة مشتقات جزئية مستمرة f_x و f_y و f_z واذا كانت x و y و z دوال قابلة للأشتقاق في المتغير المستقل t اي أن x=x(t) و y=y(t) و z=z(t) فعندئذٍ تكون w دالة قابلة للأشتقاق في t ومشتقتها تعطى بـ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

<u>Example:</u> Use the chain rule to find $\frac{\partial w}{\partial t}$ $if\ w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ and $z = e^t$

Sol.

$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$

$= (2x)(e^t \cos t - e^t \sin t) + (2y)(e^t \sin t + e^t \cos t) + (2z)(e^t)$

$= 2e^{2t}\cos^2 t - 2e^{2t} \sin t \cos t + 2e^{2t}\sin^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t + 2e^{2t}$

$= 2e^{2t}\cos^2 t + 2e^{2t}\sin^2 t + 2e^{2t}$

$= 2e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + 1)$

$\therefore \frac{\partial w}{\partial t} = 4e^{2t}$