Al-Mustaqbal University

(اسم القسم)/ تقنيات البناء والانشاءات

(المرحلة) / الثانية

(اسم المادة) الرياضيات المتقدمة

Partial derivative

الاشتقاق الجزئي: في علم الرياضيات هو اشتقاق دالة رياضية مكونة من عدة متغيرات بحيث يكون ذلك الاشتقاق بالنسبة لأحد هذه المتغيرات مع معاملة باقي المتغيرات كثوابت.

1.الاشتقاق الجزئي الظاهري explicit

هو عملية حساب المشتقة الجزئية لدالة تعتمد على عدة متغيرات، حيث نقوم بحساب المشتقة بالنسبة لمتغير واحد مع اعتبار المتغيرات الأخرى ثابتة.

Ex/اوجد المشتقات الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كان: $z = yx^2 + 3xy^3 + 4x$

.....

For $\frac{\partial z}{\partial x}$: $2yx + 3y^3 + 4$

For $\frac{\partial z}{\partial y}$: $x^2 + 9xy^2 + 0$

2 .الاشتقاق الجزئي الضمني implicit

يُستخدم عندما لا يمكن كتابة الدالة بشكل صريح (أي ليست في الشكل f(x, y) =z) ولكن يوجد علاقة بين المتغيرات. نقوم بحساب المشتقة مع اعتبار أن المتغيرات تعتمد على بعضها البعض.

Ex/ $x^2 + y^2 = 1$ **جد** $\frac{\partial y}{\partial x}$

.....

$$2x + 2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$$

خلاصة الفرق:

- **الاشتقاق الجزئي الظاهري:**

يتم حساب المشتقة بالنسبة لمتغير واحد مع اعتبار المتغيرات الأخرى ثابتة.

- **الاشتقاق الجزئي الضمني:**

يتم حساب المشتقة لدالة لا تكون معروفة بشكل صريح، ونشتق المعادلة بالكامل.

Ex/**جد المشتقات الجزئية** $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ **اذا كان :** $2z - 3xy + 4 = 0$

.....

Sol/هنا لدينا اشتقاق ضمني **implicit**

For $\frac{\partial z}{\partial x}$ **:**

$$2\frac{\partial z}{\partial x} - 3y + 0 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y}{2}$$

For $\frac{\partial z}{\partial y}$ **:**

$$2\frac{\partial z}{\partial y} - 3x + 0 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x}{2}$$

---

chain Rule (قاعدة السلسلة)

قاعدة السلسلة تُستخدم عندما نحتاج لحساب مشتقة دالة مركبة، أي دالة تتكون من دالة أخرى.

1. مفهوم الدالة المركبة:

- **ما هي الدالة المركبة؟**
- الدالة المركبة هي دالة تتكون من دالة أخرى. مثلاً، إذا كان لدينا $f(g(x)) = y$، فإن $g(x)$ تُدخل إلى f لتكوين y.

مثال:

- $y = \sin(3x)$ هنا، $\sin(u) = f(u)$ و$3x = g(x)$.

2. متى نستخدم قاعدة السلسلة؟

- **عندما تكون لديك دالة داخل دالة:**
- إذا كان لدينا تعبير مثل $f(g(x)) = y$، نستخدم قاعدة السلسلة.
- **عندما نريد فهم كيف تؤثر تغييرات x على y:**
- إذا أردنا حساب كيفية تغير y عندما يتغير x عبر دالة مركبة.

كيف نستخدم قاعدة السلسلة؟

لنستخدم خطوات بسيطة:

1. **حدد الدالة الخارجية والدالة الداخلية:**
   - إذا كان لديك $f(g(x)) = y$، فإن f هي الدالة الخارجية وg هي الدالة الداخلية.
2. **احسب المشتقات:**
   - احسب مشتقة f بالنسبة لـ g (تسمى $\frac{df}{dg}$).
   - احسب مشتقة g بالنسبة لـ x (تسمى $\frac{dg}{dx}$).
3. **استخدم قاعدة السلسلة:**
   - الصيغة هي:

$$\frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg} = \frac{dy}{dx}$$

   - هذا يعني أنك تضرب المشتقتين معًا.

لنأخذ مثالاً بسيطاً:

- إذا كانت $\sin(2x) = y$، فإن:
- $\sin(g) = f(g)$ و$2x = g(x)$.

الخطوات:

1. مشتقة الدالة الخارجية:
   - $\cos(g) = \frac{df}{dg}$.
2. مشتقة الدالة الداخلية:
   - $2 = \frac{dg}{dx}$.
3. تطبيق قاعدة السلسلة:

$$\cos(2x)\,2 = 2 \cdot \cos(2x) = \frac{dy}{dx}$$

Ex/اوجد $\frac{\partial z}{\partial v}$ عندما $\mathbf{u = 0}$, $\mathbf{v = 1}$ اذا كان :

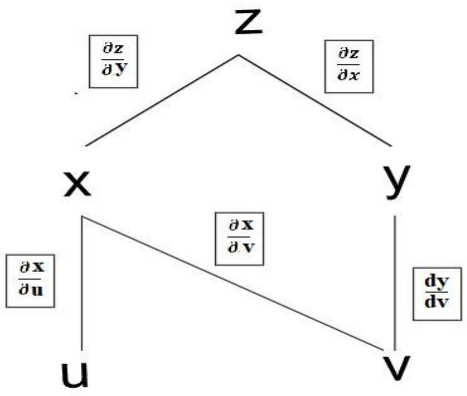
$$\mathbf{2zx + 3x - zy + 12 = 0}$$

$$\mathbf{x = 2uv^2}$$

$$\mathbf{y = v + 3}$$

.....

sol/لتوضيح مسارات الاشتقاق الجزئي انظر الشكل ادناه . لاحظ ان **y** دالة الى **v** فقط



2zx + 3x – zy + 12 = 0

By implicit derivation : for x :

$2z\,(1) + 2x\,\frac{\partial z}{\partial x} + 3 - y\,\frac{\partial z}{\partial x} + 0 = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z+3}{2x-y}$

By implicit derivation : for y :

$0 + 0 - z(1) - y\,\frac{\partial z}{\partial y} + 0 = 0$

$\frac{z}{y} = \frac{\partial z}{\partial y}$

حسب قاعدة السلسلة من الشكل في المثال لكي نحصل على $\frac{\partial z}{\partial v}$ هناك مساران يتم الجمع فيهما : المسار الاول هو $z \to x \to v$ **والثاني :** $z \to y \to v$ **ولذلك يكون :**

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dv}$$

$$= 4uv\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$= 1\,\frac{dy}{dv}$$

So :

$$= \frac{2z+3}{2x-y} \times 4uv + \frac{-z}{y} \times 1 \frac{\partial z}{\partial v}$$

When u = 0 and v = 1

x = 0 , y = 4 , z = 3

so :

$$= \frac{-9}{4} \times 0 + \frac{-3}{4} \times 1 = \frac{-3}{4} \frac{\partial z}{\partial v}$$

النهايات العظمى والصغرى ونقاط الانقلاب

1. النهايات الصغرى (Minima):

- ما هي؟: النقطة التي تصل فيها الدالة إلى أدنى قيمة مقارنة بالنقاط المجاورة.
- كيف نحددها؟

1. احسب المشتقة الأولى $f'(x)$ وحدد النقاط التي تجعلها تساوي صفر (أي إيجاد النقاط الحرجة).
2. احسب المشتقة الثانية $f''(x)$:

- إذا كانت $f''(x) > 0$ في تلك النقطة، فإنها نهاية صغرى.

2. النهايات العظمى (Maxima):

- ما هي؟: النقطة التي تصل فيها الدالة إلى أعلى قيمة مقارنة بالنقاط المجاورة.
- كيف نحددها؟

1. احسب المشتقة الأولى $f'(x)$ وحدد النقاط التي تجعلها تساوي صفر.
2. احسب المشتقة الثانية $f''(x)$:

- إذا كانت $f''(x) < 0$ في تلك النقطة، فإنها نهاية عظمى.

3. نقاط الانقلاب (Inflection Points):

- ما هي؟: النقاط التي تتغير فيها اتجاه انحناء الدالة، أي من مقعر إلى محدب أو العكس.
- كيف نحددها؟

1. احسب المشتقة الثانية $f''(x)$ وحدد النقاط التي تجعلها تساوي صفر (أو غير محددة).
2. تأكد من وجود تغيير في إشارة $f''(x)$ حول تلك النقاط (إذا كانت المشتقة الثانية تنتقل من موجب إلى سالب أو العكس).

بصوره مبسطه

- **النهاية الصغرى**: أدنى نقطة محلية، حيث تكون المشتقة الأولى صفر والمشتقة الثانية موجبة.
- **النهاية العظمى**: أعلى نقطة محلية، حيث تكون المشتقة الأولى صفر والمشتقة الثانية سالبة.
- **نقطة الانقلاب**: نقطة تغيير في انحناء الدالة، حيث تكون المشتقة الثانية صفر وتغير الإشارة.

Ex/اوجد النهايات الصغرى **min** او العظمى **max** او نقاط ال **saddle** ان وجدت للسطح :

$$\mathbf{z = x^2 - y^2}$$

.....

$= 2x \ f_x$

$= 0$ gives $x = 0 f_x$

$= -2y f_y$

$f_y = 0$ gives $y = 0$

Sub. eq. of the surface

$Z = 0 - 0 = 0$

So the point under study is (0 , 0 , 0)

$= 2 > 0 f_{xx}$

$= -2 < 0 f_{yy}$

$= f_{yx} = 0 \ f_{xy}$

$. f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2(-2) - (0)^2 = -4 < 0 \ f_{xx}$

Saddle point (0 , 0 , 0

Ex/اوجد النهايات **min** او **max** او **saddle** للسطح :

$$\mathbf{z = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4}$$

……..

$= 2y - 10x + 4 \ f_x$

$f_x = 0$ gives $y = 5x - 2$ …….(1)

$= 2x - 4y f_y$

$f_y = 0$ gives $y = \frac{x}{2}$ ……. (2)

From (1) & (2) :

$X = \frac{4}{9}$ so : $y = \frac{2}{9}$ and $z = \frac{-28}{9}$

So the point under study is $(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{-28}{9})$

f_{xx} = -10 < 0 concave down

f_{yy} = -4 < 0 concave down

$f_{xy} = f_{yx} = 2$

$f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = -10(-4) - (2)^2 = 36 > 0$

No saddle point and local maxima at $(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{-28}{9})$

بما ان المشتقة الثانية الى x **سالبة (تحدب) والى** y **ايضا سالبة (تحدب ايضا) اذن تكون النقطة نهاية عظمى** Maxima

---

Ex/اوجد النهايات **min** او **max** او **saddle** للسطح :

$$z = x^2 - 4xy + y^2 + 5x - 2y$$

.....

$f_x = 2x - 4y + 5$

$f_x = 0$ gives $y = 0.5x + 1.25$.....(1)

$= -4x + 2y - 2f_y$

$f_y = 0$ gives $y = 2x + 1$ ..... (2)

From (1) & (2) :

$X = \frac{1}{6}$ so : $y = \frac{4}{3}$ and $z = \frac{-1}{12}$

So the point under study is $(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{12})$

$f_{xx} = 2 > 0$ concave up

$f_{yy} = 2 > 0$ concave up

$$f_{xy} = f_{yx} = -4$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2(2) - (-4)^2 = -12 < 0$$

Saddle point at $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{-28}{9}\right)$

رغم ان المشتقة الثانية الى x **موجبة (تقعر) والى** y **ايضا موجبة (تقعر ايضا) لكن النتيجة كانت** saddle point **لذلك المهم هو تطبيق الشرط (الفحص) اي المتباينة .**

Ex/اوجد النهايات **min** او **max** او **saddle** للسطح :

$$z = x^2 + 2xy$$

.....

$$f_x = 2x + 2y$$

$$f_x = 0 \quad \text{gives} \quad y = -x \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$f_y = 2x$$

$$f_y = 0 \quad \text{gives} \quad x = 0$$

From (1) : $y = 0$

$$z = 0$$

So the point under study is (0 , 0 , 0)

$$f_{xx} = 2 > 0 \text{ concave up}$$

$$f_{yy} = 0$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2(0) - (2)^2 = -4 < 0$$

Saddle point at (0 , 0 , 0)

رغم ان المشتقة الثانية الى x موجبة (تقعر) والى y صفر (نقطة انقلاب) لكن النتيجة كانت saddle point **لذلك المهم هو تطبيق الشرط (الفحص) اي**

الدوال الدائرية الأساسية:

- مشتقة دالة الجيب:

$$\cos x = (\sin x)\frac{d}{dx}$$

- مشتقة دالة جيب التمام:

$$\sin x - = (\cos x)\frac{d}{dx}$$

- مشتقة دالة الظل:

$$\sec^2 x = (\tan x)\frac{d}{dx}$$

- مشتقة دالة قاطع الزاوية:

$$\csc^2 x - = (\cot x)\frac{d}{dx}$$

- مشتقة دالة قاطع الجيب:

$$\sec x \tan x = (\sec x)\frac{d}{dx}$$

- مشتقة دالة قاطع الجيب التام:

$$\csc x \cot x - = (\csc x)\frac{d}{dx}$$

2. مشتقات الدوال العادية

قوانين المشتقات الأساسية:

- مشتقة الثابت:

$$0 = (c)\frac{d}{dx} \quad (c \text{ ثابت})$$

- مشتقة دالة القوة:

$$^{n-1}nx = (^{n}x)\frac{d}{dx}$$

- مشتقة الجمع والطرح:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} = (v+u)\frac{d}{dx}$$
$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx} = (v-u)\frac{d}{dx}$$

- مشتقة الضرب (قاعدة الضرب):

$$\frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u = (uv)\frac{d}{dx}$$

- مشتقة القسمة (قاعدة القسمة):

$$\frac{\frac{dv}{dx}v\frac{du}{dx} - u}{^{2}v} = \left(\frac{u}{v}\right)\frac{d}{dx}$$