

الماضرة الثانية

الرموز الاحصائية

١. رمز الجمع

ويعبر عنه \sum ، ويمكننا التعبير عنه رياضياً كما يلي :
مجموع قيم Y مبتدأً من المشاهدة الاولى وحتى الاخيرة أي

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

وللسهولة يعبر عنه $\sum Y_i$

بعض الامثلة

١. المجموع الجزئي للملاحظات ٣، ٤، ٥ هو

$$\sum_{i=1}^3 Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

٢. مجموع مربعات لجميع المشاهدات بالرمز $\sum_{i=1}^n Y_i^2$ يساوي

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2$$

أما مربع مجموع المشاهدات $(\sum_{i=1}^n Y_i)^2$

$$\left(\sum Y_i\right)^2 = (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)^2$$

حيث ان

$$\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2\right) \neq \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2$$

٣. مجموع حاصل ضرب قيم متغيرين X ، Y هو $\sum X_i Y_i$

$$\sum X_i Y_i = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n$$

في حيث يرمز لحاصل ضرب مجموعتين لقيم متغيرين هو

$$\left(\sum X_i\right) \left(\sum Y_i\right) = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)$$

حيث ان $(\sum X_i)(\sum Y_i) \neq \sum X_i Y_i$

مثال

نفرض بأن قيم المتغير Y هي كالآتي

$$Y_i = 3, 9, 6, 2$$

وان قيم المتغير X هي

$$X = 4, 2, 3, 7$$

أوجد $(\sum X_i)(\sum Y_i)$ ، $\sum X_i Y_i$ ، $(\sum Y_i)^2$ ، $\sum_{i=1}^n Y_i$ ، $\sum_{i=1}^3 Y_i$ ، $\sum_{i=1}^4 Y_i^2$

الحل

$$\text{a) } \sum Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ = 3 + 9 + 6 + 2$$

$$= 20$$

$$\text{b) } \sum_{i=2}^3 Y_i = Y_2 + Y_3 \\ = 9 + 6 = 15$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \sum Y_i^2 &= Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 \\
&= 3+9+6+2 \\
&= 9+8+3+2 \\
&= 130
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } (\sum Y_i)^2 &= (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)^2 \\
&= (3+9+6+2) \\
&= (20)^2 \\
&= (400)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \sum X_i Y_i &= X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + X_4 Y_4 \\
&= (1)(3) + (2)(9) + (3)(6) + (4)(2) \\
&= 3+18+18+8 \\
&= 47
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f) } (\sum X) (\sum Y) & \\
&= (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \\
&= (1, 2, 3, 4)(3, 9, 6, 2) \\
&= (16)(20) \\
&= 320
\end{aligned}$$

بعض القواعد المفيدة في عملية الجمع

١. إذا كانت (C) اي عدد ثابت فإن

$$\sum_{i=1}^n C = n \cdot c$$

البرهان

$$\sum_{i=1}^n C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

٢. إذا كانت (C) اي عدد ثابت فإن

$$\sum CY_i = C \sum Y_i$$

البرهان

$$\begin{aligned} \sum CY_i &= CY_1 + CY_2 + \dots + CY_n \\ &= C(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) \\ &= C \sum Y_i \end{aligned}$$

٣. جمع قيم متغيرين او اكثر هو مجموع جمعهم اي ان

$$\sum (X_i + Y_i) = \sum X_i + \sum Y_i$$

البرهان

$$\begin{aligned} \sum (X_i + Y_i) &= (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \dots + (X_n + Y_n) \\ &= (X_1 + X_2 + \dots + X_n) + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) \\ &= \sum_1^n X_i + \sum_1^n Y_i \end{aligned}$$

وهنا يجب التفريق بين بعض الرموز الاحصائية وكالتالي :

$$1. \sum \frac{X_i}{Y_i} = \frac{X_1}{Y_1} + \frac{X_2}{Y_2} + \dots + \frac{X_n}{Y_n}$$

$$2. \frac{\sum X_i}{\sum Y_i} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}$$

$$3. \sum (X_i - 3) = \sum X_i - n(3)$$

وانها تختلف عن $\sum X_i - 3$

مثال

اذا علمت بأن قيم كل من المتغيرين X , Y هي كالاتي :

$$X_i = 2,6,3,1$$

$$Y_i = 3,9,6,2$$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$1. \sum (Y_i - X_i)^2$$

$$2. \sum (X_i - 3)(Y_i - 5)$$

$$3. \sum X_i Y_i^2$$

$$4. \sum (Y_i - 3)$$

$$5. \sum Y_i - 3$$

$$6. \sum \frac{X_i + 2}{Y_i}$$

$$7. \frac{\sum (X_i + 2)}{\sum Y_i}$$

$$8. \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$

$$9. \sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}$$

$$\begin{aligned} 1. \sum (Y_i - X_i)^2 &= (Y_1 - X_1)^2 + (Y_2 - X_2)^2 + \dots + (Y_n - X_n)^2 \\ &= (3 - 2)^2 + (9 - 6)^2 + (6 - 3)^2 + (2 - 1)^2 \\ &= 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} \sum (Y_i - X_i)^2 &= \sum (Y_i^2 - 2X_iY_i + X_i^2) \\ &= \sum Y_i^2 - 2 \sum X_iY_i + \sum X_i^2 \\ &= (3 + 9 + 6 + 2)^2 - 2(2 + 6 + 3 + 1)(3 + 9 + 6 + 2) + \dots \end{aligned}$$

أكمل الباقي من الطلاب

$$\begin{aligned} 2. \sum (X_i - 3)(Y_i - 5) &= (X_1 - 3)(Y_1 - 5) + (X_2 - 3)(Y_2 - 5) + (X_3 - 3)(Y_3 - 5) + (X_4 - 3)(Y_4 - 5) \\ &= (2 - 3)(3 - 5) + (6 - 3)(9 - 5) + (3 - 3)(6 - 5) + (1 - 3)(2 - 5) \\ &= (-1)(-2) + (3)(4) + 0(1) + (-2)(-3) \\ &= 2 + 12 + 0 + 6 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum (X_i - 3)(Y_i - 5) \\
&= \sum (X_i Y_i - 5X_i - 3Y_i + 15) \\
&= \sum X_i Y_i - 5 \sum X_i - 3 \sum Y_i + 4(15) \\
&= 80 - 5(12) - 3(20) + 60 \\
&= 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \sum X_i Y_i^2 &= X_1 Y_1^2 + X_2 Y_2^2 + X_3 Y_3^2 + X_4 Y_4^2 \\
&= 2(3)^2 + 6(9)^2 + 3(6)^2 + 1(2)^2 \\
&= 616
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \sum (Y_i - 3) &= \sum Y_i - \sum (3) \\
&= \sum Y_i - 4(3) \\
&= (3 + 9 + 6 + 2) - 12 \\
&= 20 - 12 = 8
\end{aligned}$$

$$5. \quad \sum Y_i - 3 = 20 - 3 = 17$$

$$\begin{aligned}
6. \sum \frac{X_i + 2}{Y_i} &= \frac{X_1 + 2}{Y_1} + \frac{X_2 + 2}{Y_2} + \frac{X_3 + 2}{Y_3} + \frac{X_4 + 2}{Y_4} \\
&= \frac{2 + 2}{3} + \frac{6 + 2}{9} + \frac{3 + 2}{6} + \frac{1 + 2}{2} \\
&= \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{5}{6} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{164}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \frac{\sum(X_i + 2)}{\sum Y_i} &= \frac{\sum X_i + (n)(2)}{\sum Y_i} \\
&= \frac{12 + 8}{20} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} &= (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2) - \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4} \\
&= 3^2 + 9^2 + 6^2 + 2^2 - \frac{(3 + 9 + 6 + 2)}{4} \\
&= 130 + \frac{(20)^2}{4} = 130 - 100 = 30
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n} \\
&= X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + X_4 Y_4 - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n} \\
&= 2(3) + 6(9) + 3(6) + 1(2) - \frac{(12)(20)}{4} \\
&= 80 - \frac{(12)(20)}{4} \\
&= 20
\end{aligned}$$

