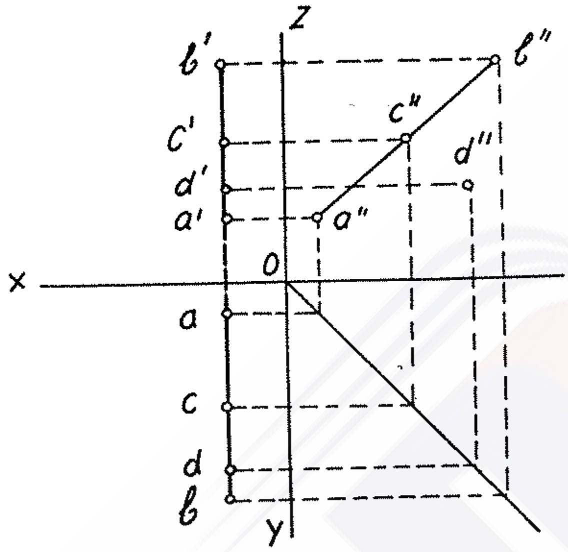
تماثلها بالنسبة للمستقيم ٠

٢ـ النقطة N غير واقعة على المستقيم ، لأن مساقطها لاتقع على مساقطه٠

والسؤال الذي يطرح نفسه

الآن : ماوضع بقية النقـــاط ؟



شكل رقم (٦٨)

في الشكل (٦٨) :

١ـ النقطة C تقع علـــــى المستقيم AB ٠

٢ـ النقطة D غير واقعـة على المستقيم AB

III ـ ٥ ـ آثار المستقيم في مستويات الاسقاط :

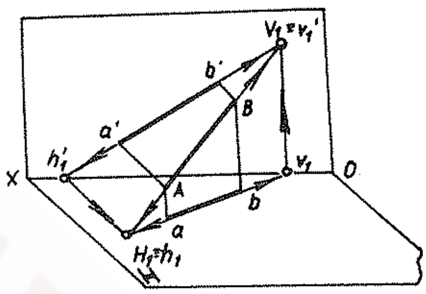
ذكرنا في الفقرة (III ـ ٢) أن مسقط المستقيم الاسقاطي علـــــى مستوي الاسقاط المعني ينطبق على أثر المستقيم ٠ فما هذا الأثر ؟

اذا لم يكن المستقيم المعني موازيا لمستوي الاسقاط ، فانه يتقاطع مع هذا المستوي (يخترقه) ، ونسمى نقطة التقاطع هذه **بأثر** المستقيم في هـــذا المستوي ٠ ولهذا نجد ـ كما هو واضح في الشكلين (٦٩ للتعبير الاسقــاطي الفراغي الثنائي) و (٧٠ للتعبير الاسقاطي الفراغي الثلاثي) أن :

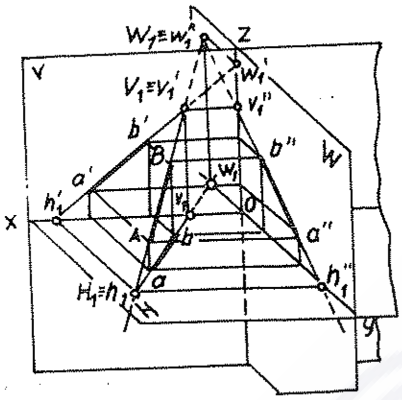
١ـ نقطة اختراق المستقيم للمستوي H تمثل الأثر الأفقي للمستقيم ٠

٢ـ نقطة اختراق المستقيم للمستوي V تمثل الأثر الأمامي له ٠

٣ـ نقطة اختراق المستقيم للمستوي W تمثل أثره الجانبي ٠



شكل رقم (٦٩)



شكل رقم (٧٠)

III ـ ٥ ـ ١ ـ تحديد آثار المستقيم (الحالة العامة في التعبير الاسقاطي المستوي :

لما كان أثر المستقيم يمثل نقطة تقاطعه مع مستوي الاسقاط المعني ، فان هذه النقطة تقع في الوقت نفسه على هذا المستوي ، وهذا يعني أنها تنطبق على مسقطها في هذا المستوي وأن مساقطها على مستويات الاسقاط الأخرى تقع على محاور الاسقاط الفاصلة بينها وبين المستوي المعني في نفس الوقت الذي تقع فيه على المساقط المناظرة للمستقيم . وعلى هذا الأساس نقوم بالخطوات التالية لتحديد آثار المستقيم في حالته العامة :

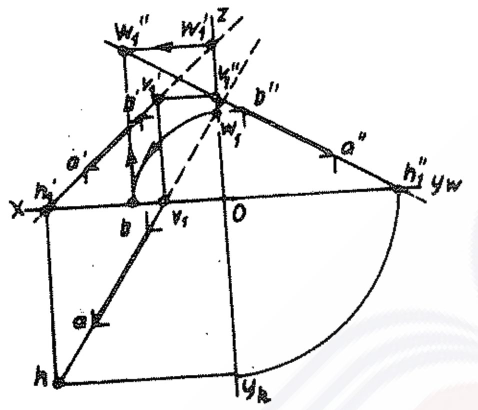
١ـ لايجاد الأثر الأمامي للمستقيم نمد مسقطه الأفقي حتى يقطع خط الأرض (OX) ، فتمثل نقطة التقاطع هذه المسقط الأفقي (v_1) للأثر الأمامي V ، لأنها نقطة مشتركة بين المسقط الأفقي للمستقيم ومحور الاسقاط (OX) ، وتمثل نقطة تقاطع العمود المقام على OX من هذه النقطة (v_1) مع المسقط الأمامي أثر المستقيم الأمامي (V) ومسقطة الأمامي v_1' المتطابق معه (يمثل الشكل ٧١ التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي).

في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي الذي يمثله الشكل (٧٢) تضيف الى ماذكرناه أن من الممكن ايجاد الأثر الأمامي بمساعدة المسقط الجانبي • فاذا مامددنا هذا الأخير حتى يتقاطع مع محور الاسقاط (OZ) نحدد المسقط الجانبي للأثر الأمامي v_1'' ، ونجد أن نقطة تقاطع العمود المقام على (OZ) من هذه النقطة v_1'' مع المسقط الأمامي تحدد الأثر الأمامي (V) للمستقيم ومسقطه الأمامي (v_1') •

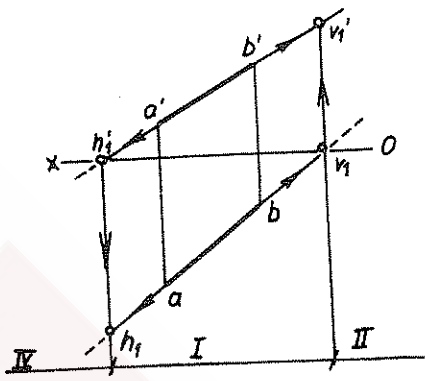
٢ـ لايجاد الأثر الأفقي (H) للمستقيم ، نمد مسقطه الأمامي حتى يقطع (OX) ،ونقيم من نقطة التقاطع هذه ـ وهي تمثل المسقط الأمامي (h_1') للأثر الأفقي ـ عمودا على (OX) ونجد ان نقطة تقاطع العمود مع المسقط الأفقي للمستقيم تحدد أثره الأفقي (H)ومسقطه الأفقي (h_1) (الشكل ٧١) •

في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي الذي يوضحه الشكل (٧٢) نضيف الى ماذكر أن من الممكن تحديد الأثر الأفقي H بمساعدة المسقط الجانبي للمستقيم • فنقطة تقاطعه مع (OY_w) تمثل المسقط الجانبي للأثر الأفقي (h_1'') • وحين ننقل هذه النقطة الى (OY_h) ونقيم منها عمودا عليه نحصل على الأثر الأفقي (H) ومسقطه الأفقي (h_1) من تقاطع العمود مع المسقط الأفقي للمستقيم •

٣ـ بالأسلوب ذاته وبمساعدة المسقط الأمامي أو الأفقي للمستقيم يمكننا أن نحصل على الأثر الجانبي (W) ومسقطه الجانبي (w_1'') •



شكل رقم (٧٢)



شكل رقم (٧١)

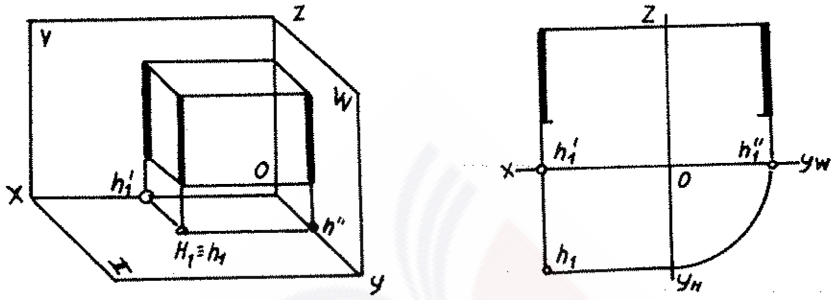
III ـ ٥ ـ ٢ ـ تحديد آثر المستقيم في حالاته الخاصة في التعبير الاسقاطي المستوي :

في الحالة العامة للمستقيم لاحظنا أنه يخترق مستويات الاسقاط جميعها تاركا فيها آثاره ۰ وفي حالاته الخاصة نرى أنه يوازي أحد مستويات الاسقاط أو اثنين منها ۰ في هذه الحالات ليس للمستقيم آثار في هذه المستويات (في المجال المنظور) ، الا أن له آثارا في المستويات غير الموازية للمستقيم ۰

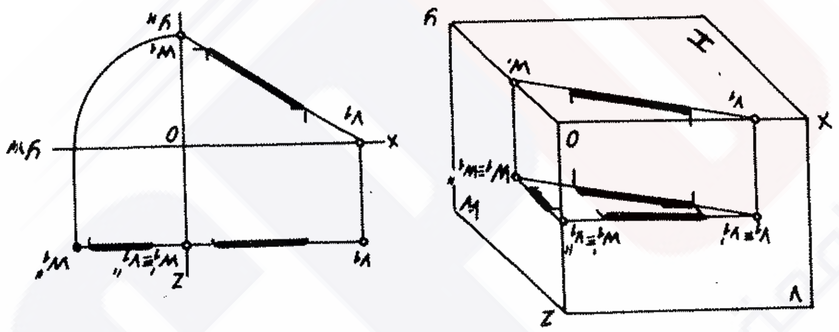
١ـ ان مستقيمات الاسقاط توازي مستويين من مستوياته في آن ، ولهذا يكون لها أثر واحد ، مثلا : لمستقيم الاسقاط الأفقي أثر أفقي ، كما هو واضح في الشكل (٧٣) ، ولمستقيم الاسقاط الأمامي أثر أمامي ، ولمستقيم الاسقاط الجانبي أثر جانبي ۰

٢ـ ان المستقيمات الأفقية والأمامية والجانبية مستويا واحد من مستويات الاسقاط ، ولهذا يكون لها أثران ، وان طريقة الحصول عليها تطابق ماذكرناه في الحالة العامة ، ويمثل الشكل(٧٤) أحدها وهو المستقيم

الأفقي الذي نجد له أثرين اثنين : أمامي V وجانبي W .



شكل رقم (٧٣)



شكل رقم (٧٤)

٣ـ للمستقيمات الأفقية والأمامية والجانبية الواقعة في مستويات الاسقاط المناظرة أثران أيضا ، ولكنهما يقعان على محاور الاسقاط ، لأن المسقطين الآخرين لكل منهما يقعان على هذه المحاور (راجع الأشكال ٥١ و ٥٢ و ٥٣) .

III ـ ٦ ـ تحديد الوضع الفراغي للمستقيم بالنسبة لمستويات الإسقاط في التعبير الاسقاطي :

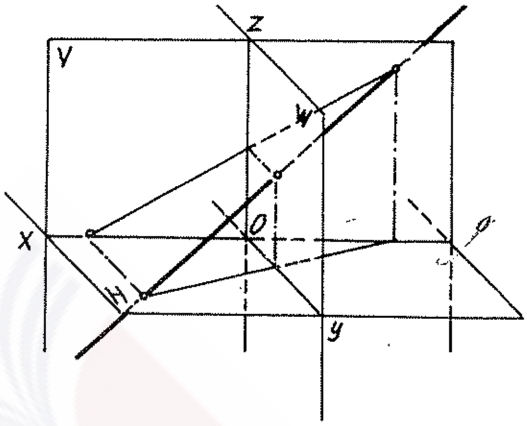
المستقيم هو عنصر هندسي فراغي غير محدد النهايات . وأما ماتحدده بين نقطتين فهو مقطع منه محدد بهما . وعند دراسة وضع المستقيم أو مقطع

محدد منه في الفراغ ومحاولة تحديد هذا الوضع بالنسبة لمستويات الاسقاط المعنية ، نجد أن هذا المستقيم لابد أن يخترق أحدها أو اثنين منها أو جميعها • واذا كان محددا ، فانه يمكن أن يخترق بعضها أو كلها أو يقع في منطقة الفراغ المحصورة بينها • وللتمييز بين أوضاع المستقيم المختلفة في الفراغ بالنسبة لمستويات الاسقاط تصنف مناطق الفراغ المقسمة بواسطة مستويات الاسقاط في التعبير الفراغي والمستوي في مناطق مرئية وأخرى غير مرئية (مخفية) •

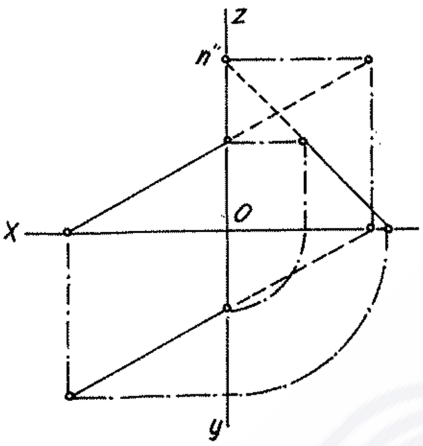
وبشكل عام يكون الناظر أمام المنطقةالأولى(I) من تقسيمات الفراغ • ففي التعبير الاسقاطي الفراغي نجد أن العناصر الهندسية أو أجزاءها الواقعة في هذه المنطقة تكون مرئية ، وتكون بقية العناصر الهندسية أو أجزاؤها غير مرئية (الشكل ٧٥) • وفي التعبير الاسقاطي المستوي تستخدم محاور الاسقاط للتعبير عن مستويات الاسقاط التي تُعد غير محدودة • ولهذا نجد أن الجزء المرئي هو الثُمن I وأن بقية المناطق التي تحجبها مستويات الاسقاط هي غير مرئية (الشكل ٧٦) ، وهذا يعني أن مقطع المستقيم الموجود أمام مستوي الاسقاط الأمامي وفوق مستوى الاسقاط الأفقي (في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي) ويسار مستوي الاسقاط الجانبي (في التعبير الاسقاطي الثلاثي) يكون مرئيا ، وأما ماعدا ذلك فهو غير مرئي •

III ـ٦ـ١ـ التنقطيط كوسيلة لتحديد الوضع الفراغي للمستقيم بالنسبة لمستويات الاسقاط :

للتمييز بين الأجزاء المرئية والأجزاء غير المرئية من المستقيم (العنصر أو الشكل الهندسي) يرُسم الجزء المرئي منه أو من مساقطه ، في



شكل رقم (٧٥)



شكل رقم (٧٦)

التعبيز الاسقاطي المستوي على شكل خط متواصل وفي الأجزاء غير المرئيـة من المستقيم فراغيا أو من مساقطه في التعبير الاسقاطي المستوي يُرسم على شكـل خط متقطع (منقط) • وهذا مانسمية بـ (التنقيط) لتحديد موقع المستقيم أو أجزائه في الفراغ بالنسبة لمستويات الاسقاط • الشكليـن (٧٥ و ٧٦) يوضحان ذلك فراغيا واسقاطيا •

الفصل الرابع :

العلاقة المتبادلة بين المستقيمات وبعض حالات اسقاط الزوايا المستوية

العلاقة المتبادلة بين المستقيمات :

= المستقيمات المتقاطعة .

= المستقيمات المتوازية .

= المستقيمات المتخالفة .

تحديد طول مقطع مستقيم وزوايا ميله .

تقسيم المستقيم بنسبة محددة .

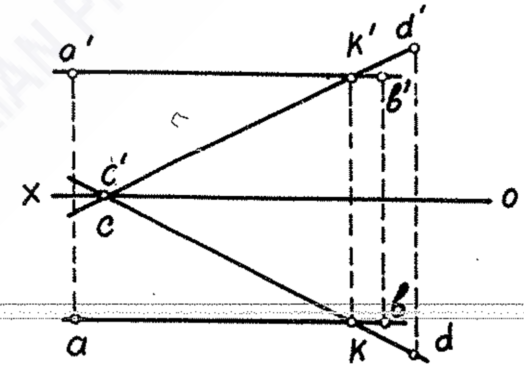
بعض حالات اسقاط الزوايا المستوية .

IV ـ ١ ـ العلاقة المتبادلة بين المستقيمات :

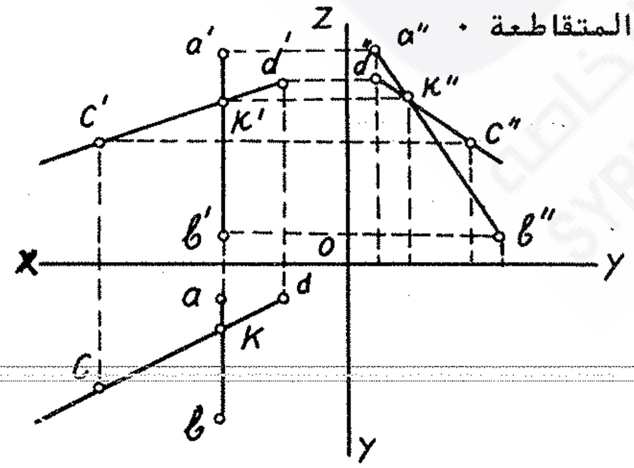
ان هذه العلاقة تتحدد بثلاثة أوضاع في الفراغ ، وهي :

١ـ المستقيمات المتقاطعة في الفراغ :

في هذه الحالة تتقاطع مساقطها المتناظرة أيضا ،ونقاط تقاطع المساقط تمثل مساقط نقطة تقاطع المستقيمات في الفراغ ، وبالتالي يجب أن تقع هذه النقاط (أي نقاط تقاطع المساقط) على مستقيمات موحدة تعامد الفصول المشتركة لمستويات الاسقاط • وفي الاسقاط الثنائي يجب أن تقع هذه النقاط على مستقيم واحد يعامد خط الأرض • واذا كان أحد المستقيمات المتقاطعة على الأقل مستقيما جانبيا فان التحقق من تقاطعها لابد أن يتم بواسطة مستويات الاسقاط الثلاثية (انظر الشكلين ٧٧ و ٧٨) • وتمثل المستقيمات المتعامدة حالة خاصة للمستقيمات المتقاطعة •



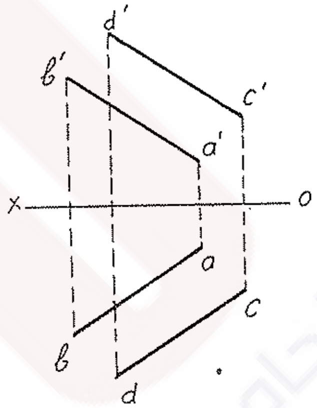
شكل رقم (٧٧)



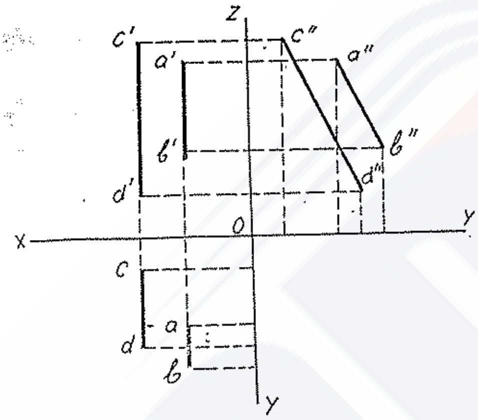
شكل رقم (٧٨)

٢ـ المستقيمات المتوازية في الفراغ :

تكون المساقط المتماثلة لهذه المستقيمات متوازية (الشكل ٧٩) أو متطابقة في أحد مستويات الاسقاط عندما تكون في مستو واحد عمودي على مستوي الاسقاط المعني . وفي هذه الحالة لابد أن نتحقق من ذلك في مستوي الاسقاط الجانبي اذا كانت المستقيمات المتوازية جانبية (الشكل ٨٠).



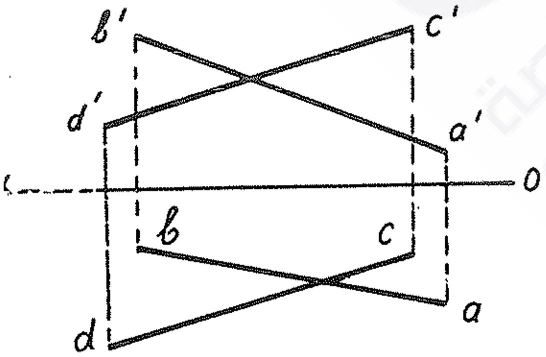
شكل رقم (٧٩)



شكل رقم (٨٠)

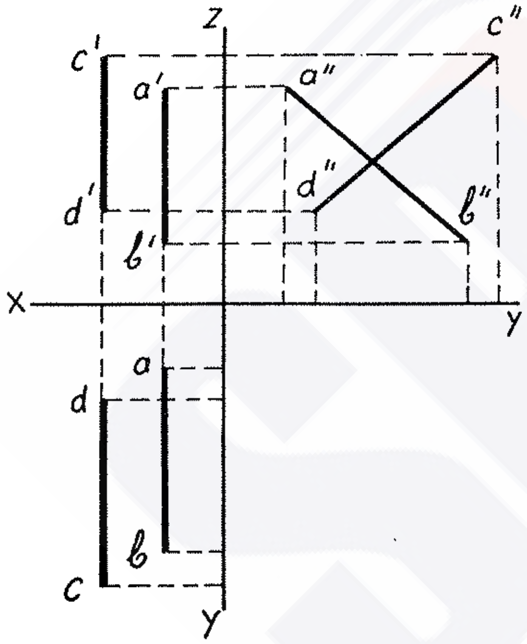
٣ـ المستقيمات المخالفة في الفراغ :

اذا لم تكن المستقيمات المعنية متقاطعة أو متوازية فانها ستكون مستقيمات متخالفة ، تكون مساقطها كيفية ، وقد تظهر في أحد المستويات وكأنها متقاطعة، ويمكن أن نتحقق من ذلك حين نبحث عن المسقط الثاني لنقطة التقاطع (المزعومة) ، واذا لم يكن أحد المستقيمين جانبيا فان وهمية هذه النقطة ستتضح من خلال عدم وجود مسقط قان لها مشترك

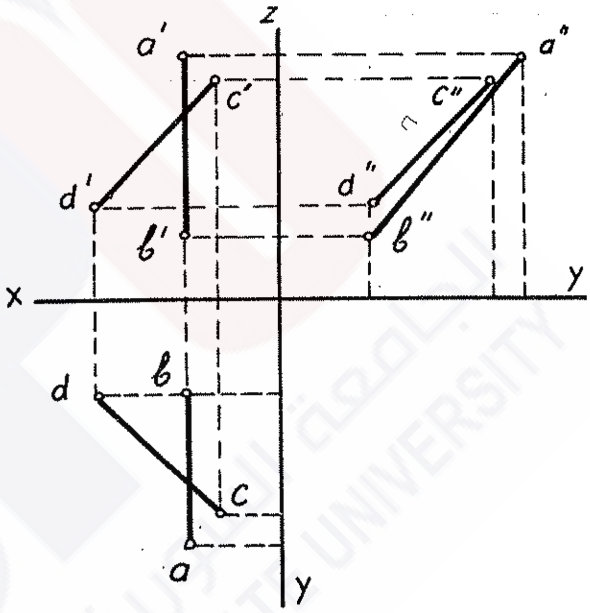


شكل رقم (٨١)

بين المستقيمين ، واذا كان أحد المستقيمين جانبيا فلايمكن التحقق بمسقطين ، بل يجب الاستعانة بالمسقط الجانبي أيضا • وأحيانا تظهر المستقيمات الجانبية المتخالفة في مسقطيها الأمامي والأفقي وكأنها مستقيمات متوازية • وفي هذه الحالة أيضا يمكن أن نتحقق من وضعها حين نرجع الى المسقط الجانبي لها • الاشكال (٨١ ، ٨٢ و ٨٣) توضح هذه الوضعية •



شكل رقم (٨٣)



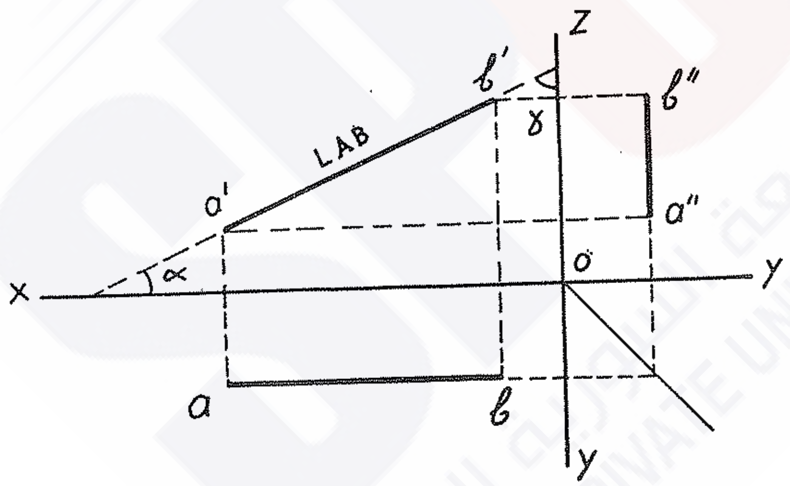
شكل رقم (٨٢)

IV ـ٢ـ تحديد طول مقطع المستقيم وزوايا ميله بالنسبة لمستويات الاسقاط:

لاحظنا في الفصل السابق (III ـ ٢) أن مسقط المستقيم الموزي لأحد مستويات الاسقاط في الفراغ على هذا المستوي لايتشوه ، أي يكون مساويا طوله الحقيق • وفي الوقت نفسه يمثل مثل هذا المسقط بالنسبة لمحوري الاسقاط اللذين يحددان هذا المستوي الميل الفعلي (الزاوية الفعلية)

للمستقيم الأصلي (الفراغي) بالنسبة لمستويي الاسقاط الآخرين • فمثلا اذا كان المستقيم في الفراغ موازيا لمستوي الاسقاط الأمامي (الشكل ٨٤) فان طول مسقطه الأمامي سيساوي طول المستقيم الحقيق ، وان ميل هذا المسقط بالنسبة لخط الأرض (OX) يمثل ميل المستقيم الفعلي بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي ، وان ميل هذا المسقط بالنسبة لمحور (OZ) يمثل ميل المستقيم الفعلي بالنسبة لمستوي الاسقاط الجانبي •

ان هذه الطريقة السابقة لتحديد طول مقطع المستقيم وزوايا ميله بالنسبة لمستويات الاسقاط ممكنة في الحالات الخاصة لوضع المستقيم في الفراغ •



شكل رقم (٨٤)

وأما طول مقطع المستقيم في الحالة العامة لوضعه في الفراغ فانه يمكن أن يحدد باستخدام الطريقة المسماة ب (طريقة المثلث القائم لتحديد طول مقطع مستقيم) • ولتوضيح هذه الطريقة نفترض أن لدينا مقطع المستقيم AB في الحالة العامة ، ونعبر عنه بمساقطه الثلاثة (ab

و($a'b'$) و ($a''b''$) الشكل (٨٥) ، ولايجاد طول هذا المقطع نتبع الخطوات التالية :

١- نختار أحد المساقط ليكون قاعدة لرسم المثلث القائم ، وليكن المسقط الامامي ($a'b'$).

٢- نقيم مستقيما عموديا على المسقط المختار من احدى النقطتين اللتين تحددانه ، ولتكن النقطة (a').

٣- نأخذ قيمة تساوي القيمة المطلقة للفرق الجبري لاحداثيات النقطتين اللتين تحددان أحد المسقطين الآخرين بالنسبة للفصل المشترك لمستوي الاسقاط الأمامي ومستوي الاسقاط الذي يقع فيه المسقط المعني .

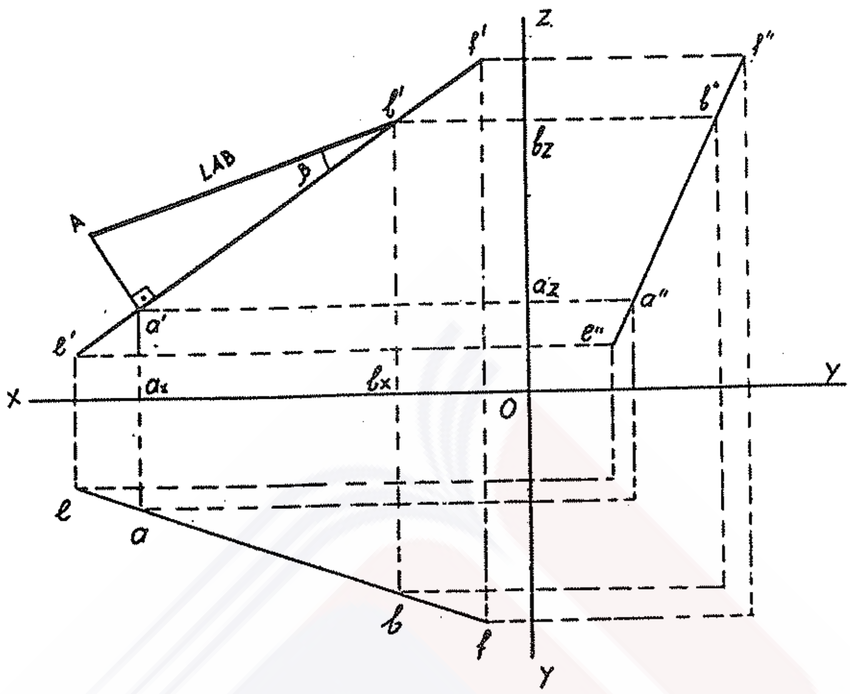
وبتعبير آخر نقول : نحدد القيمة المطلقة لـ $(Y_b - Y_a)$ أي : $|b\,b_x - a\,a_x|$ أو لـ $(Y_{b''} - Y_{a''})$

أي : $|b''\,b_z - a''\,a_z|$ على المستقيم الذي يعامد $a'\,b'$ في نقطة a' ، فنحصل على الضلع القائم الثاني للمثلث ، وهو $a'A$.

واذا ماوصلنا بين النقطتين A و b' نحصل على مثلث قائم الزاوية $A\,a'\,b'$ ، يمثل $a'b'$ أحد أضلاعه القائمة ، ويمثل Ab' وتره .

٤- ان طول وتر المثلث الحاصل يمثل الطول الحقيقي لمقطع المستقيم المطلوب .

٥- وان الزاوية المحصورة في هذا المثلث بين وتره والمسقط المختار تساوي الزاوية الحقيقية بين المستقيم في الفراغ ومستوي الاسقاط الذي يقع فيه هذا المسقط . وفي مثالنا تمثل الزاوية β الزاوية الحقيقية التي يصنعها المستقيم مع مستوي الاسقاط الأمامي في الفراغ .



$$Aa' = \left| b\ b_x - a\ a_x \right| = \left| b''\ b_z - a''\ b_z \right|$$

شكل رقم (٨٥)

β – زاوية ميل المستقيم في الفراغ بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي ٠

IV – ٣ – تقسيم المستقيم بنسبة محددة :

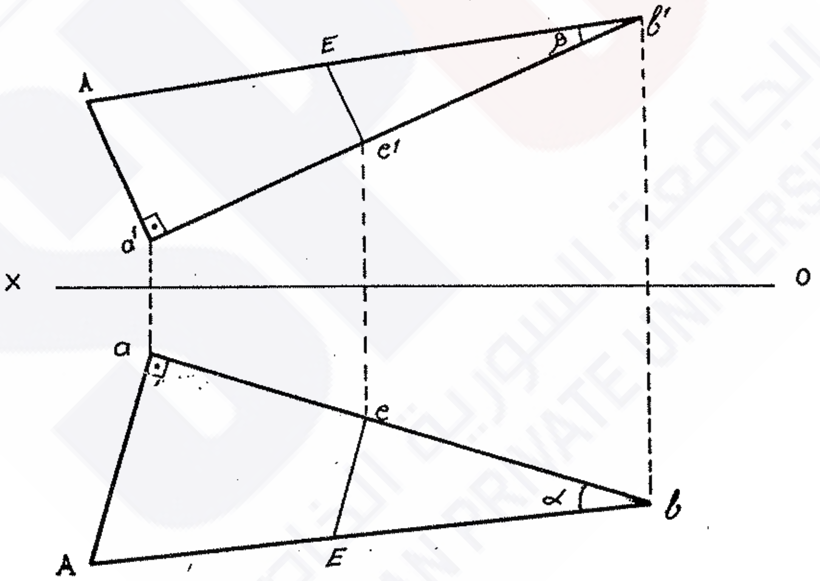
اذا قسّمت نقطة مستقيما الى جزأين بنسبة (m : n) فان مساقط هذه النقطة تقسم المساقط المناظرة بالنسبة نفسها ٠

واذا عبرنا عن وضع المستقيم AB في الفراغ من خلال مسقطيه في التعبير المستوي الاسقاطي الثنائي (a b) و(a'b') فاننا نستطيع تحديد طوله الحقيقي باستخدام طريقة المثلث القائم التي ذكرناها في الفقرة السابقة (IV – ٢)، فنحصل على Ab' و Ab ، كما هو موضح في الشكل (٨٦) ٠

ولو أخذنا الآن النقطة E من Ab' لوجدنا أنها تقسمه الى جزأين ،هما (AE) و (Eb') ٠ لنرسم عمودا من نقطة E على المسقط الأمامي (a'b')

فنحصل على المسقط الأمامي لهذه النقطة ('e) ، ولندرس المثلثين('A b'a) و ('E b'e)، فنجد أنهما متشابهان لأن الزوايا المتناظرة متساوية • من هذا التشابه نحصل على $\frac{e'\ b'}{a'\ b'} = \frac{E\ b'}{A\ b'}$ ، ويعني هذا أن مسقط النقطة E الأمامي 'e قسم المسقط الأمامي'a'b للمستقيم AB بنفس النسبة التي قسمت بها النقطة E المستقيم نفسه • وبالطريقة ذاتها يمكن أن يثبت ذلك بالنسبة لبقية المساقط (انظر الشكل ٤٧) •

وفي ضوء ذلك نجد أن تقسيم مستقيم ما بنسب معينة من خلال مساقطه لايحتاج الى تحديد طوله الحقيقي •



شكل رقم (٨٦)

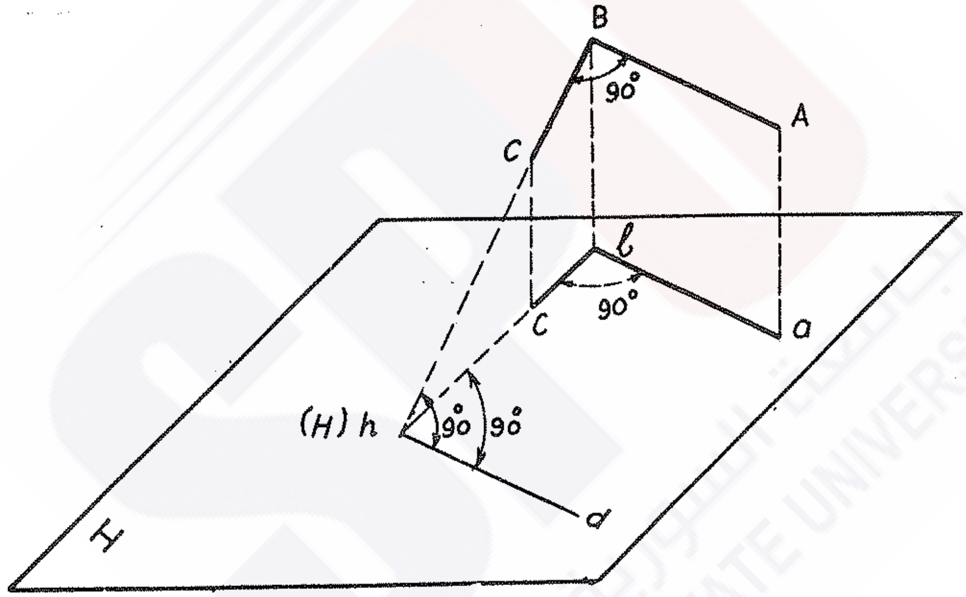
$$\frac{Eb'}{Ab'} = \frac{e'b'}{a'b'} \quad , \quad \frac{Eb}{Ab} = \frac{eb}{ab} \quad , \quad Ab'=Ab \ , \ Eb'=Eb \ , \quad \frac{e'b'}{a'b'} = \frac{eb}{ab}$$

١٧ــ٤ــ بعض حالات اسقاط الزوايا المستوية :

١٧ــ٤ــ١ــ اذا كان أحد أضلاع الزاوية القائمة الفراغية موازيا لمستوي الاسقاط

فان مسقطها على هذا المستوي يكون زاوية قائمة أيضا (أي دون تشويه) ، علما بأن مستوي الزاوية القائمة غير متعامد مع مستوي الاسقاط هذا .

لنفترض أن الضلع AB للزاوية القائمة ABC (الشكل ٨٧) يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H ، ولذلك يكون مسقطه على هذا المستوي موازيا له من غير تشوه في طوله .



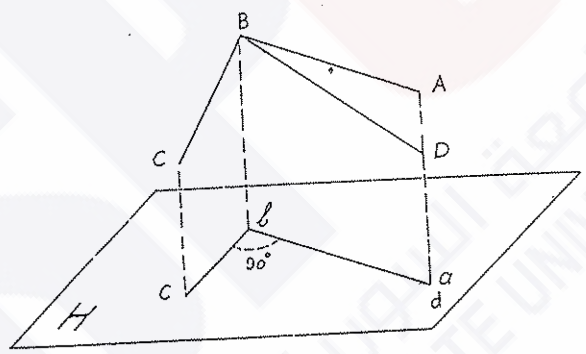
شكل رقم (٨٧)

وأما الضلع BC فان لم يكن موازيا للمستوي فهو يتقاطع معه . نوجد أثر المستقيم على مستوي الاسقاط ، أي : نوجد نوجد نقطة اختراقه للمستوي ، h(H) ، وتكون هذه النقطة في الوقت نفسه نقطة تلاقي المستقيم ومسقطه الأفقي bc . من النقطة h نرسم مستقيما hd في مستوي الاسقاط H موازيا للمسقط ab وموازيا بالضرورة للمستقيم الأصلي AB ، ولذلك ستكون الزاوية dhB قائمة وستكون الزاوية

قائمة ايضا (حسب بديهيات التعامد) ، وهذا يعني أن الزاوية d h b قائمة أيضا (حسب بديهيات التعامد والتوازي التي تؤكد قائلة : اذا abc كان المستقيمان متوازيين ، فان المستقيم العمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر) .

IV ـ ٤ ـ ٢ ـ قاعدة معاكسة :

" اذا كان مسقط زاوية يشكل زاوية قائمة فان الزاوية المسقطة (الفراغية) لاتكون قائمة الا اذا كان أحد أضلاعها على الأقل موازيا لمستوي الاسقاط المعني " .



شكل رقم (٨٨)

لو افترضنا أن الزاوية القائمة abc لاتمثل مسقط الزاوية القائمة ABC التي يوازي ضلعها AB مستوي الاسقاط فحسب ، وانما تمثل أيضا الزاوية القائمة DBC التي يميل ضلعاها بالنسبة لمستوي الاسقاط ، كما هو موضح في الشكل (٨٨) ، لوجدنا في هذه الحالة أن المستقيم (الضلع) CB العمودي على كل من المستقيمين (الضلعين) BA و BD يكون عموديا على المستوي الاسقاطي " BAab "(بديهيات التعامد : يتعامد مستقيم مع مستوي اذا تعامد مع مستقيمين مختلفي الاتجاه في المستوي) وبالتالي يوازي