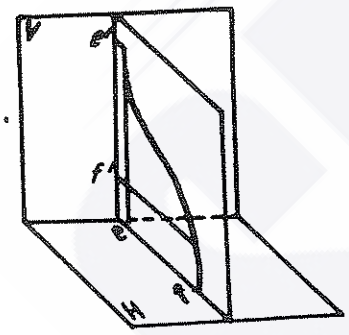
يمكن ان نحدد بسهولة أوضاع المستقيم جميعها في الفـــــــراغ الا المستقيمات الجانبية ، وذلك من خلال التعبير الاسقاطي المستوي الثنـائي ، لكن هذا التعبير غير كاف لتحديد طبيعة المستقيمات الجانبية ووضعهـا أو تحديد طبيعة ووضعية الشكل الهندسي المستوي الذي يوازي مستوي الاسقـاط الجانبي ، ويتطلب ذلك حتما استخدام التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي .

في الشكل (٥١) نلاحظ أن كلا المسقطين الأمامي والأفقي يمثـــلان مستقيمين عموديين على OX ، ويحققان بذلك شروط المستقيم الجـــانبي (الوضعية ٤ في الجدول) ، الا أن الشكل (٥٤) يبين لنا أن هذيـــن المسقطين هما لخط منحن مستو واقع في مستو جانبي (V و H) ، ولذلـك كان المسقط الجانبي في هذه الحالة لابـد منه في توضيح الصورة الحقيقية .



شكل رقم (٥٤)

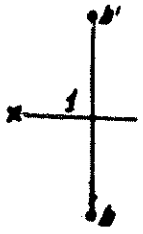
III ـ ٤ ـ التعبير الاسقـاطي المســتوي الشـامل (غير المحـــدد) أو الاسقـــاط دون استخدام محـــاور الاســـقاط :

في الفصل الثاني (II ـ ٣) استغنينا عن التعبير الكامل لمستويـات الاسقاط ، واستخدمنا للتعبير عنها محاور الاسقاط .

ان التعبير الاسقاطي المستوي المستخدم حتى الآن في هذا الكتاب يوضح لنا موقع العنصر الهندسي الفراغي بالنسبة لمجموعة معينة من مستويـــات

الاسقـــاط ٠

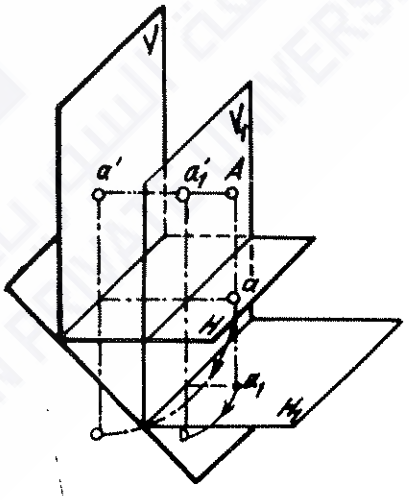
فالشكل (٥٥) يوضح لنا التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي للنقطة B الواقعة على بُعـــد يساوي | b' 1 | عن مستوي الاسقاط الأفقي وعـــلى بُعد | a 1 | عن مستوي الاسقاط الأمامي ، وهـذان البعدان يحددهما محور الاسقاط (x) ٠



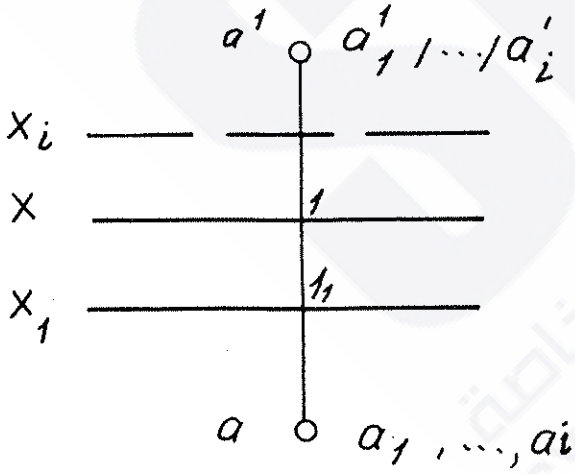
شكل رقم (٥٥)

لندرس الآن الحالة التي يوضحها الشكل (٥٦) : لدينا النقطـــة A ومجموعة اسقاطية ثنائية من المستويين V و H ومجموعة اسقاطية ثنائيـة أخرى V_1 و H_1 مزاحة بموازاة المجموعة الأولى على مستو مائل ٠

مسقطا النقطة A على مجموعة الاسقاط الأولى تمثل a و a' ، وعلى المجموعة الثانية تمثل a_1 و a'_1 ٠



شكل رقم (٥٦)



شكل رقم (٥٧)

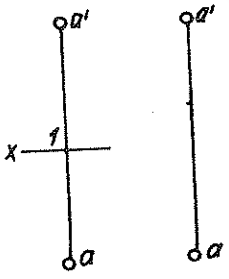
ولو انتقلنا من التعبير الاسقاطي الفراغي الى التعبير الاسقـــــاطي المستوي بتدوير المستويين H و H_1 حسب الأصول لحصلنا على وضعيـــــن

مستويين متطابقين يعبر عن الأول المحور X وعن الثاني المحـــــور X_1 . ومن خلال هذا التعبير الاسقاطي يتضح لنا أن النقطة A تقع على أبعـــــاد متباينة عن مستويات المجموعتين .

فالبعد عن مستويات الاسقاط الأفقية $|a'1|$ $\neq$ $|a'_1{}^1{}_1|$ والبعُـــد عـــن مستويات الاسقاط الأمامية $|a\ 1|$ $\neq$ $|a_1\ {}^1{}_1|$ ، وعلى الرغم من ذلـــك ، نجد أن مسقطي النقطة A (الشكل ٥٧) على مستويات المجموعتين بقيـــا في وضع ثابت ، حيث $a_1 \equiv a$ و $a'_1 \equiv a'$. ولو أخذنا أيضا عـــدة مجموعات اسقاط أخرى في نفس وضعية المجموعتين V/H و V_1/H_1 (فـــي الشكل يعبر عنها بالمحور X_i) لحصلنا على صورة مناظرة للصـــــورة السابقة ، أي الأبعاد عـــن مستويات الاسقاط تتباين ، لكن وضع المساقـــط نفسها يبقى ثابتا .

مما سبق نستطيع التوصل الى استنتاج يقول : " ان موقع مستويـــات الاسقاط لايؤثر في الوضع الحقيقي الفراغي للعنصر الهندسي " . وهـــــذا الاستنتاج منطقي فعلا ، لأن مستويات الاسقاط هذه هي في الأساس افتراضيـة ، وأن موقعها وليد اختيارنا .

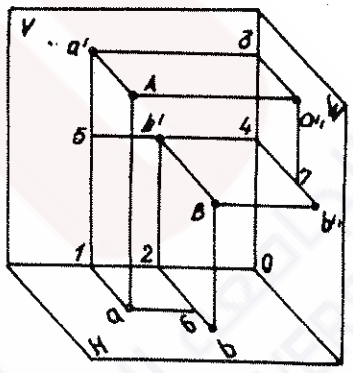
ولهذا نرى أن التعبير الاسقاطي المستوي بوجود محور الاسقاط يمثل الوضع الاسقـــاطي للعنصر الهندسي (في الشكـــل ٥٨ ـ A) بالنسبة لمجموعة اسقاطية معينة يعبر عنهـا محور الاسقاط هذا (المحور X) ، وأمـــا التعبير الالاسقاطي دون استخدام محـــــاور الاسقاط (الشكل ٥٨ الى اليمين) فهو يمثـل



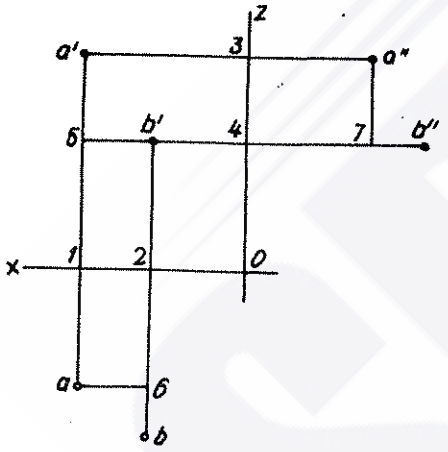
شكل رقم (٥٨)

التعبير الاسقاطي المستوي الشامل للعنصر الهندسي (للنقطة A) ، أي يمكن أن يمثل وضع النقطة A بالنسبة لعدد غير محدد من مجموعات الاسقاط ذات الوضع المناظر لوضع مجموعة الاسقاط التي يعبر عنها محورالاسقاط X .

لندرس حالة أخرى يوضحها الشكل (٥٩) ، فنقول : لدينا النقطتان في وضعهما الفراغي بالنسبة لمجموعة الاسقاط V و H و W . والمطلوب أن نحدد الفرق بين بعديهما عن مستويات هذه المجموعة من خلال مساقطهما .



شكل رقم (٥٩)



شكل رقم (٦٠)

من التعبير الاسقاطي المستوي للنقطتين A و B بالنسبة لمجموعة الاسقاط V و H و W (الشكل ٦٠) يتضح لنا أن الفرق بين بعديهما عن مستوي الاسقاط :

آ ـ الأفقي يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الأماميين عن محور الاسقاط (OX) ، أي أن : a'1 - b'2 = a'5 ، أو يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الجانبيين عن محور الاسقاط (OY_W)الذي يمثل a" 7 .

ب ـ الأمامي يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الأفقيين عن محور الاسقاط (OX) ، أي أن : b 2 - a 1 = b 6 ، أو يساوي الفرق بين بعدي

مسقطيهما الجانبيين عن محور الاسقاط (OZ) الذي يمثل 7 "b .

ج ـ الجانبي يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الأفقيين عن (OY_h) وهو يمثل 6 a ، أو يساوي الفرق بين بعدي مسقطيهما الأماميين عن محور الاسقاط (OZ) ، أي أن : 5 b' 4 = b' 3 - a' .

وأما في الشكل (٦١) فاننا استخدمنا التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي الشامل للنقطتين A و B وفيه نجد أن الفرق بين بُعدي النقطتين عن مستويات أية مجموعة اسقاطية (تناظر مجموعة الاسقاط H و V و W) يبقى ثابتا . وهنا نلاحظ أن هذه الفروق هي مااستنتجناها من خلال الشكل (٦٠) ، أي : عن المستوي الأفقي 5'a وعن المستوي الأمامي 6 b وعن المستوي الجانبي 6 a أو 5 b' .

وهذا يقودنا الى الاستنتاج السابق نفسه ، وهو أن (العلاقة المتبادلة بين مساقط العنصر الهندسي ثابتة وتعبر عن الوضع الفراغي له ، وليس ثمة صلة لموقع مستويات الاسقاط بها).

شكل رقم (٦١)

من جهة أخرى نجد أن الانتقال من الوضعية العمومية للمساقط (وذلك دون استخدام محاور الاسقاط) الى الوضعية التي تحددها بالنسبة لمجموعة معينة من مستويات الاسقاط (وذلك باستخدام محاور الاسقاط) يتم في عملية مباشرة وبسيطة ، ولهذا يكفي أن نقيم مستقيما عموديا على مستقيمات الاسقاط الواصلة المعنية . وأما موقع هذا العمود فهو كيفي

(الا اذا حدد موقع مستويات الاسقاط بالنسبة للنقطة المعنية مسبقا) .

ان المهمة الأساسية للتعبير الاسقاطي المستوي هي معرفة الوضع الفراغي وتركيب العنصر الهندسي أو شكله من خلال مساقطه ولهذا نجد أن مستويات الاسقاط المستخدمة في هذا التعبير هي وسيلة مساعدة للوصول الى هذا الغرض ، ولذلك نقول : اذا كان ثمة امكانية لتحقيق المهمة الأساسية دون الحاجة الى هذه الوسيلة المساعدة (مستويات الاسقاط) فان استخدام الحالة العمومية (وذلك دون استخدام محاور الاسقاط) يبسط الحل ويسهله .

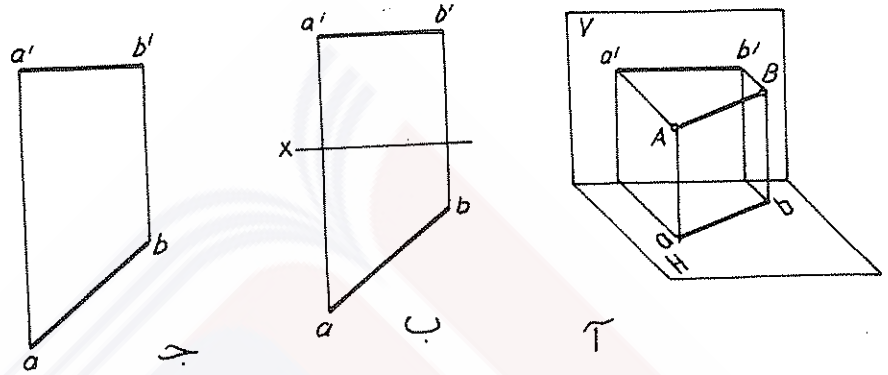
اعتمادا على مابيناه سنستخدم الى جانب التعبير الاسقاطي المستوي المحدد (باستخدام محاور الاسقاط) التعبير الاسقاطي المستوي الشامل أو غير المحدد (دون استخدام محاور الاسقاط) . وفي بعض المسائل سنستخدم الطريقة التعبيرية التي تؤمن لنا الحل الأوضح والأبسط .

يتم تحقيق التعبير الاسقاطي المستوي الشامل للمستقيم والأشكال الهندسية المستوية والفراغية من خلال تطبيقه على النقاط التي تحدد هذه العناصر الهندسية .

ويمكن رسم مساقط المستقيم في التعبير الاسقاطي المستوي الشامل من خلال رسم مساقط نقطتين من نقاطه وفق القواعد التي ذكرناها سابقا . وفي هذا المجال نعود مرة ثانية الى الشكل (٦١) ، فلو وصلنا بين مساقط النقطتين A و B المتماثلة لحصلنا على مساقط مقطع مستقيم AB في التعبير الاسقاطي المستوي الشامل .

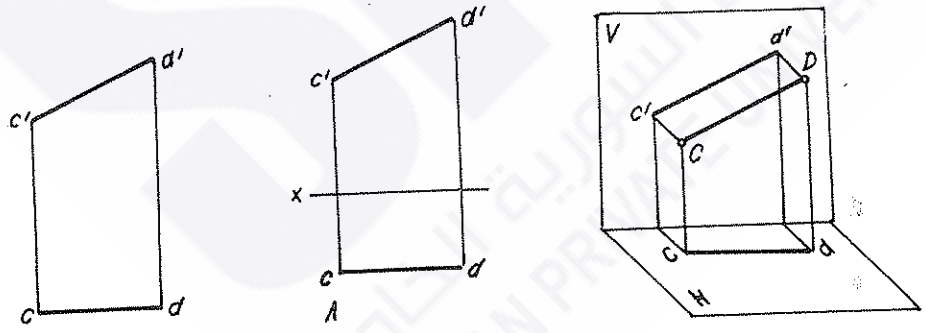
يمثل الشكل (٦٢ آ) التعبير الفراغي لوضع المستقيم AB بالنسبة لمجموعة الاسقاط V/H ، ويعطينا الشكل (٦٢ ب) التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي لهذا المستقيم الأفقي بالنسبة لهذه المجموعة الاسقاطية ،

ونجد في الشكل (٦٢ جـ) التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي الشامل الذي يوضح أن المستقيم AB هو مستقيم أفقي ، أي أنه لايوازي المستوي H من هذه المجموعة الاسقاطية فحسب ، وانما يوازي كل مستو اسقاطي أفقي .



شكل رقم (٦٢)

ويوضح الشكل (٦٣) التعبير الفراغي والتعبير الاسقاطي المستوي الثنائي المحدد (بالنسبة لمجموعة الاسقاط V/H) والشامل للمستقيم الأمامي CD .



شكل رقم (٦٣)

ان انشاء التعبير الاسقاطي المستوي الشامل للمستقيم يعتمد في الأساس على فرق احداثيات النقاط التي تحدده . فلو عدنا الى الشكل (٦١) لوجدنا أننا باختيار وضع كيفي للنقطة A (اختيار وضع كيفي لمساقطها)

ورسم المقطع $|5\ a'|$ على المستقيم الاسقاطي وتحديد النقطة 5 ورسم مقطع مستقيم أفقي يساوي $|5\ b'|$ نستطيع أن نحدد المسقط الأمامي للنقطة B(b') . وبعد ذلك نأخذ من نقطة تقاطع المستقيم الاسقاطي المار من(b') والمستقيم الأفقي المرسوم من النقطة (a) مقعطا يساوي $|6\ b|$ على المستقيم الاسقاطي للنقطة B فنحدد بذلك المسقط الأفقي b للنقطة B . ويمثل المستقيم الواصل بين b' و a' المسقط الأمامي a'b' لمقطع المستقيم AB . ويمثل المستقيم الواصل بين b و a المسقط الأفقي ab لمقطع المستقيم AB .

لنستعرض الآن طريقة حل المثال المطلق التالي :

مثـــال : أرسم التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي الشامل لمقطع المستقيم المحدد بالنقطتين $A(X_A,Y_A,Z_A)$ و $B(X_B,Y_B,Z_B)$.

الحـــل :

١ـ نحدد كيفيا أحد مساقط احدى النقطتين ، ولتكن A ، فنأخذ نقطة كيفية نعدها المسقط a ، ومن هذه النقطة نرسم مستقيما شاقوليا ، يمثل مستقيم الاسقاط ، ونحدد عليه مقطعا مساويا $|Z_A + Y_A|$ ، فنعيّن المسقط الأمامي a' .

٢ـ نرسم من أحد هذين المسقطين ـ وليكن a' ـ مستقيما أفقيا ، ونحدد عليه مقطعا $|a'3| = |X_A - X_B|$ ، ونرسم من النقطة 3 مستقيما شاقوليا نحدد عليه من النقطة 3 مقطعا مساويا $|Z_B - Z_A|$ ، فنحدد المسقط b' ، ثم نحدد على الشاقول نفسه من النقطة b' الى الأسفل مقطعا $|Z_B + Y_B|$ ، فنحدد المسقط b . ويمثل المستقيم الواصل

بين a و b المسقط الأفقي للمستقيم ، ويمثل المستقيم الواصل بين a' و b' مسقطه الأمامي (الشكل ٦٤ آ) .

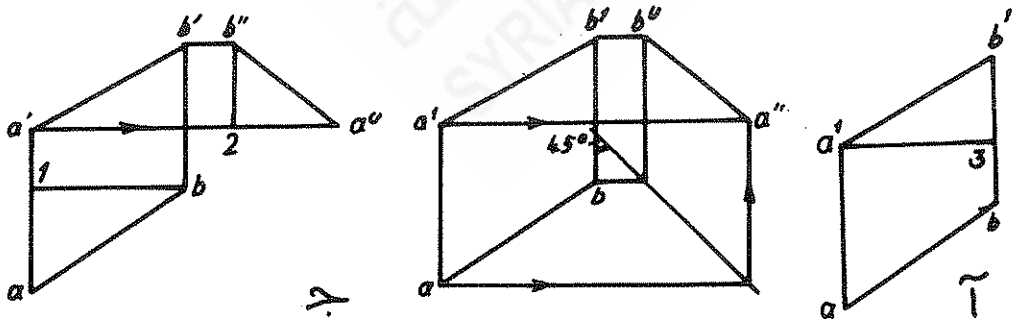
لرسم المسقط الجانبي نستكمل الخطوات التالية :

١ـ نرسم من النقطتين a' و b' مستقيمين أفقيين .

٢ـ نحدد في موقع كيفي من أحد هذين المستقيمين الأفقيين (خارج حدود المسقط الأمامي) نقطة تمثل المسقط الجانبي للنقطة المعنية (يفضل في البداية أن نختار المسقط الجانبي للنقطة التي يكون مسقطها الأفقي في موضع شاقولي أعلى ، أي تكون أقرب الى المسقط الأمامي) . وفي مثالنا هذا نختار نقطة في موقع كيفي على المستقيم الأفقي المرسوم من النقطة b' ، لتمثل المسقط الجانبي b" للنقطة B .

٣ـ نرسم من النقطة b مستقيما أفقيا يقطع مستقيم الاسقاط a'a في النقطة 1 .

٤ـ نرسم من النقطة b" مستقيما شاقوليا يقطع المستقيم الأفقي في النقطة 2 ، ومنها نحدد على المستقيم الأفقي المرسوم من النقطة a' مقطعا مساويا للمقطع |a 1| فنحصل بذلك على a" المسقط الجانبي للنقطة A . وأما المستقيم الواصل بين a" و b" ، فهو يمثل المسقط الجانبي a"b" لمقطع المستقيم |AB| الشكل (٦٤ جـ) .



شكل رقم (٦٤)

يمكننا أن نتبع طريقة أخرى لايجاد المسقط الجانبي "a"b ، تبدو أبسط من الطريقة السابقة ، وتتلخص في الخطوات التالية :

١ـ نرسم من موقع كيفي على يمين الاسقاط الثنائي (المساقط الأفقية والأمامية) مستقيما مائلا عن الشاقول بزاوية ٤٥ درجة على اليمين (الشكل ٦٤ ب) .

٢ـ نرسم مستقيمات أفقية من النقاط a و b و 'a و 'b .

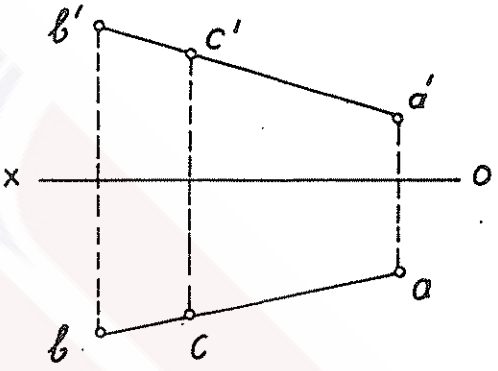
٣ـ نرسم مستقيمين شاقوليين من نقطتي تقاطع المستقيمين الأفقيين المرسومين من النقطتين a و b مع المستقيم المائل .

٤ـ تمثل نقطتا تقاطع المستقيمين الشاقوليين مع المستقيمين الأفقيين المرسومين من النقطتين 'a و 'b المسقطين الجانبيين "a و "b على التوالي ، ويمثل المستقيم الواصل بينهما المسقط الجانبي "a "b للمستقيم AB (الشكل ٦٤ ب) .

III ـ ٤ ـ العلاقة المتبادلة بين مستقيم ونقطة :

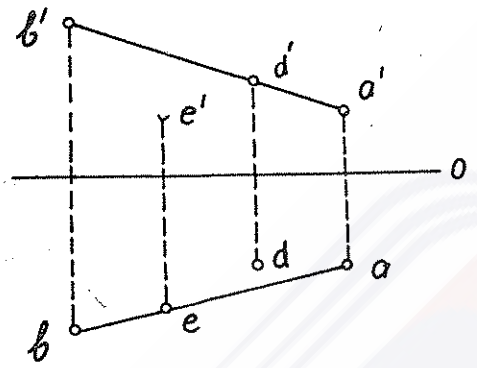
ان هذه العلاقة تتحدد بوضعين اثنين : الأول أن تقع النقطة على المستقيم والثاني أن تكون خارجة عنه ، فان كانت النقطة واقعة عليه في الفراغ فان مساقطها تقع على مساقط المستقيم المماثلة (الشكل ٦٥)، وعكس هذا صحيح ، أي : اذا وقع أحد مساقط النقطة أو أكثر مساقطها خارج مساقط المستقيم التي تماثلها ، فان النقطة لاتقع على هذا المستقيم (الشكل ٦٦) ، ويكفي لتحقيق ذلك أن نستخدم التعبير الاسقاطي الثنائي الا أننا في حالة المستقيمات الجانبية يجب أحيانا أن نتأكد من صحة التطابق باستخدام مستويات الاسقاط الثلاثة كلها : الأفقي H والأمامي V

والجانبي W ، وفي ضوء ذلك يمكن أن نتوصل الى الاستنتاج التالي : اذا مرّ مستقيم من نقطة ما في الفراغ مرت بالضرورة مساقطه جميعها من مساقط النقطة التي تماثلها .



شكل رقم (٦٥)

النقطة C واقعة على المستقيم AB .



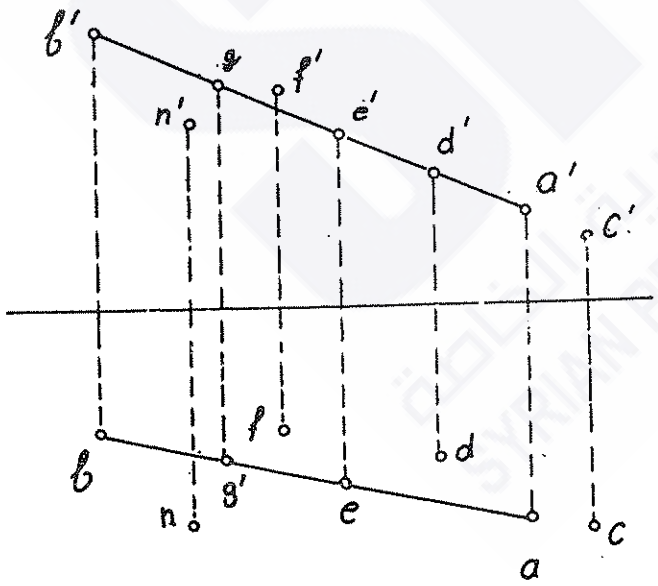
شكل رقم (٦٦)

النقطتان D و E غير واقعتين على المستقيم AB .

مثال : حدد في التعبير المستوي المجاور وضع النقاط C وD وE و F وG و N بالنسبة للمستقيم AB (الشكل ٦٧)

الحل :

١ـ النقطة E واقعة على المستقيم ، لأن مساقطها تقع على المساقط التي

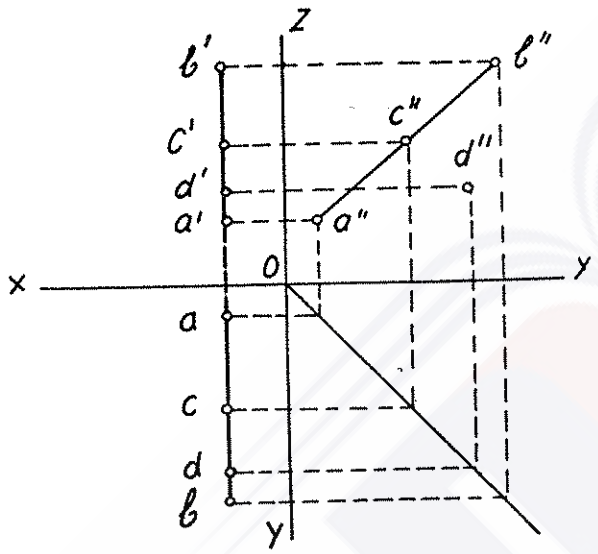


شكل رقم (٦٧)

تماثلها بالنسبة للمستقيم .

٢ـ النقطة N غير واقعة على المستقيم ، لأن مساقطها لاتقع على مساقطه.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن : ماوضع بقية النقـــاط ؟



شكل رقم (٦٨)

في الشكل (٦٨) :

١ـ النقطة C تقع علـــى المستقيم AB .

٢ـ النقطة D غير واقعـة على المستقيم AB

III ـ ٥ ـ آثار المستقيم في مستويات الاسقاط :

ذكرنا في الفقرة (III ـ ٢) أن مسقط المستقيم الاسقاطي علـــى مستوي الاسقاط المعني ينطبق على أثر المستقيم . فما هذا الأثر ؟

اذا لم يكن المستقيم المعني موازيا لمستوي الاسقاط ، فانه يتقاطع مع هذا المستوي (يخترقه) ، ونسمى نقطة التقاطع هذه **بأثر** المستقيم في هـــذا المستوي . ولهذا نجد ـ كما هو واضح في الشكلين (٦٩ للتعبير الاسقـاطي الفراغي الثنائي) و (٧٠ للتعبير الاسقاطي الفراغي الثلاثي) أن :

١ـ نقطة اختراق المستقيم للمستوي H تمثل الأثر الأفقي للمستقيم .

٢ـ نقطة اختراق المستقيم للمستوي V تمثل الأثر الأمامي له .

٣ـ نقطة اختراق المستقيم للمستوي W تمثل أثره الجانبي .