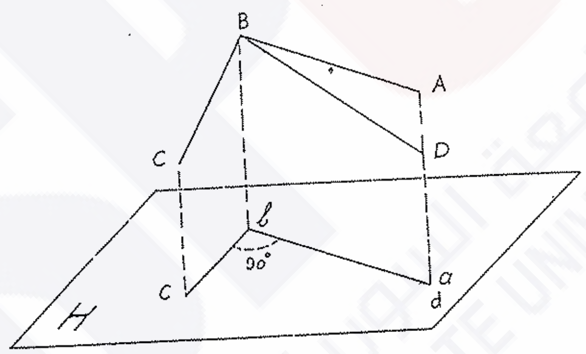
قائمة ايضا (حسب بديهيات التعامد) ، وهذا يعني أن الزاوية d h b قائمة أيضا (حسب بديهيات التعامد والتوازي التي تؤكد قائلة : اذا abc كان المستقيمان متوازيين ، فان المستقيم العمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر) .

IV ـ ٤ ـ ٢ ـ قاعدة معاكسة :

" اذا كان مسقط زاوية يشكل زاوية قائمة فان الزاوية المسقطة (الفراغية) لاتكون قائمة الا اذا كان أحد أضلاعها على الأقل موازيا لمستوي الاسقاط المعني " .



شكل رقم (٨٨)

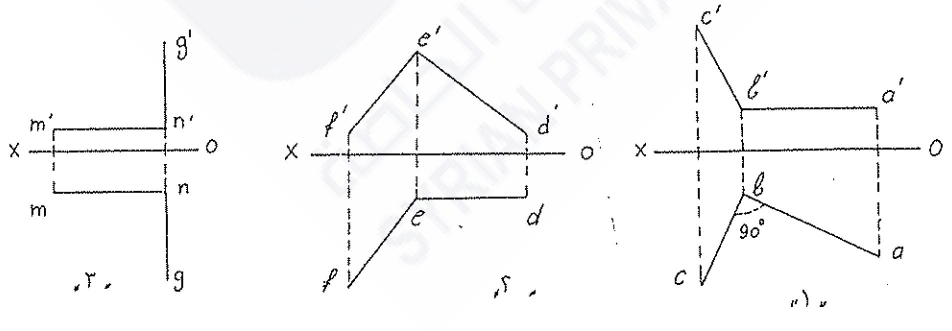
لو افترضنا أن الزاوية القائمة abc لاتمثل مسقط الزاوية القائمة ABC التي يوازي ضلعها AB مستوي الاسقاط فحسب ، وانما تمثل أيضا الزاوية القائمة DBC التي يميل ضلعاها بالنسبة لمستوي الاسقاط ، كما هو موضح في الشكل (٨٨) ، لوجدنا في هذه الحالة أن المستقيم (الضلع) CB العمودي على كل من المستقيمين (الضلعين) BA و BD يكون عموديا على المستوي الاسقاطي " BAab "(بديهيات التعامد : يتعامد مستقيم مع مستوي اذا تعامد مع مستقيمين مختلفي الاتجاه في المستوي) وبالتالي يوازي

مستوي الاسقاط الأفقي H (بديهيات التوازي) وهذا يعني أن ضلع الزاوية C B يجب أن يوازي مستوي الاسقاط H ، ان لم يكن ضلعها الآخر B D يوازي هذا المستوي ، حتى تكون الزاوية CBD قائمة ٠ وهذا ماتنص عليه القاعدة السابقة ٠

IV — ٤ — ٣ — تكون الزاوية الفراغية قائمة اذا كان أحد أضلاعها يوازي مستوي الاسقاط ، واذا كان مسقطها على هذا المستوي يمثل زاوية قائمة ٠

ولما كانت الزاوية abc قائمة (الشكل ٨٨) وكان المستوي الاسقاطي CB bc المار من bc عموديا على مستوي الاسقاط H ، فان ab سيكون عموديا على CBbc ، وفي هذه الحالة يكون المستقيم AB الذي يوازي (حسب الفرضية) مستوي الاسقاط H (والذي يوازي بالتالي مسقطه على هذا المستوي ab) عموديا على المستوي الاسقاطي CBbc ، ولذلك يغدو واضحا لدينا أن الزاوية ABC هي زاوية قائمة ٠

وفي ضوء ماتوصلنا اليه نجد أن الزوايا ABC و DEF و MNG المعبر



شكل رقم (٨٩)

عنها اسقاطيا في التعبير المستوي الاسقاطي الثنائي (الشكل ٨٩) هي

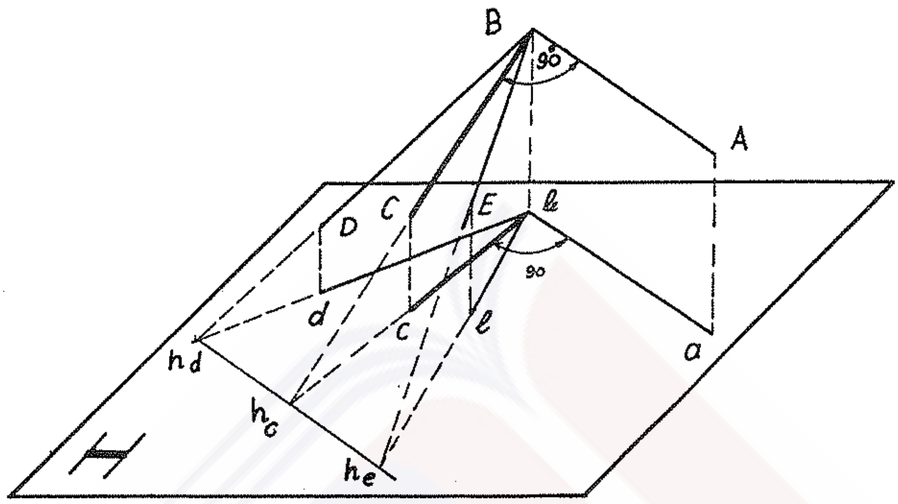
زوايا قائمة . والحالة التي يوضحها الشكل (٨٩ ـ ٣) والتي يمثل فيها مسقطا الزاوية MNG على مستويي الاسقاط الأمامي والأفقي زاوية قائمة ، يمكن الحصول عليها في حالة أن أحد أضلاع الزاوية عمودي على مستوي الاسقاط الثالث (في حالتنا هذه MN يعامد مستوي الاسقاط الجانبي W) . وعند ذلك يوازي الضلع الآخر هذا المستوي (في حالتنا هذه NG يوازي مستوي الاسقاط الجانبي W) .

IV ـ ٥ ـ ٤ ـ اذا كان أحد أضلاع الزاوية الحادة أو المنفرجة موازيا لمستوي الاسقاط فان مسقط هذه الزاوية على هذا المستوي يمثل زاوية حادة ، ان كانت الزاوية المسقطة حادة ، ويمثل أيضا زاوية منفرجة ، ان كانت الزاوية المسقطة منفرجة .

لنفترض أن المستقيم AB يوازي مستوي الاسقاط الأفقي ، ولندرس وضع احدى الزاويتين : المنفرجة ABD أو الحادة ABE (الشكل ٩٠) من اجل ذلك نأخذ في مستوي هذه الزاوية المستقيم CB عموديا على AB (AB CB) . فلمّا كانت الزاوية ABC قائمة ، فان مسقطها abc يمثل أيضا زاوية قائمة. هذه الزاوية ـ كما هو واضح من الشكل (٩٠) ـ تضم في داخلها الزاوية a b e(أي أن $< abe < 90°$) ، وتقع الزاوية abc ذاتها داخل الزاوية a b d(أي أن $< abd > 90°$) .

ان هذه النتيجة تجعلنا نخلص الى مايلي : " اذا كان أحد أضلاع الزاوية على الأقل موازيا لمستوي الاسقاط فان مساقطها تمثل زوايا تشبهها (قائمة ، منفرجة ، حادة).

IV ـ٤ـ ٥ ـ اذا كانت أضلاع الزاوية (أية زاوية) موازية لمستوي



شكل رقم (٩٠)

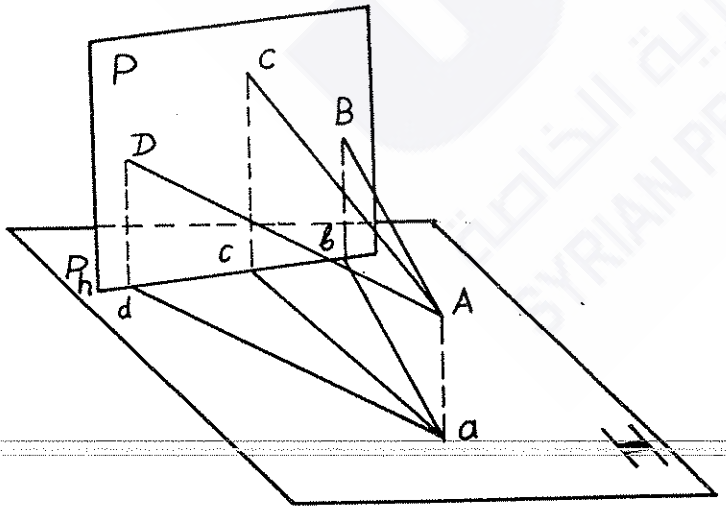
الاسقاط فان مسقطها على هذا المستوي يمثل زاوية تساويها بالمقدار ٠

لتوضيح ذلك نرجع الى ماذكرناه في الفصل الثالث (III ـ ٣) حول الحالات الخاصة لوضع المستقيم في الفراغ والتعبير الاسقاطي له ٠ ذكرنا أن المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي يمثل الميل الحقيقي لهذا المستقيم بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي ، وذكرنا أن مسقطه الأمامي يوازي خط الأرض (OX) الذي يمكن أن يُعد مستقيما واقعا في المستوي الأفقي (وذلك لأنه الفصل المشترك بينه وبين المستوي الأمامي) ٠ في هذه الحالة اذا مددنا المستقيم الفراغي حتى يلامس مستوي الاسقاط الأمامي في نقطة أثره التي هي امتداد مسقطه الأمامي في الوقت ذاته ، فاننا نحصل على زاوية ميل المستقيم بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي ، ضلعاها موازيان لمستوي الاسقاط الأفقي ، ثم نجد أن مسقطها على هذا المستوي (يمثل هذا المسقط المسقط الأفقي للمستقيم نفسه وخط الأرض الذي يمثل في الوقت نفسه المسقط الأفقي لمستقيم المسقط

الأمامي في المستوي الأمامي) يكوّن زاوية تماثل الزاوية الأصلية في القيمة والصفة . ان موازاة كلا ضلعي الزاوية لمستوي الاسقاط شرط أساسي لتتساوى قيمة الزاوية المنفرجة أو الحادة في الفراغ وقيمة مسقطها .

ففي الوقت الذي تكفي الزاوية القائمة موازاة أحد أضلاعها لمستوي الاسقاط حتى يكون مسقطها زاوية قائمة أيضا (أي تكون ذات قيمة واحدة) ، نجد أن قيمة الزاوية المنفرجة أو الحادة التي يوازي أحد أضلاعها مستوي الاسقاط لايمكن أن تساوي قيمة مسقطها . ويلاحظ هنا أن قيمة مسقط الزاوية الحادة أقل من قيمة الزاوية نفسها ، وأن قيمة مسقط الزاوية المنفرجة أكبر من قيمة الزاوية نفسها .

لنفترض أن لدينا الزاوية CAB ، ضلعها AB يكون موازيا لمستوي الاسقاط الأفقي H ، وضلعها AC يكون في حالته العامة بالنسبة لهذا المستوي (الشكل ٩١) . نمرر من النقطتين B و C المستوي الاسقاطي الأفقي P ($H \perp P$) ، ولو مررنا من نقطة A مستقيمات مختلفة مع المستقيم AB الزاوية نفسها لوجدنا أن هذه المستقيمات جميعها ستتقاطع



$AB \parallel H \longrightarrow AB \parallel ab$

$AD \parallel H \longrightarrow AD \parallel ad$

$P \perp H$

$\angle CAB = \angle DAB$

شكل رقم (٩١)

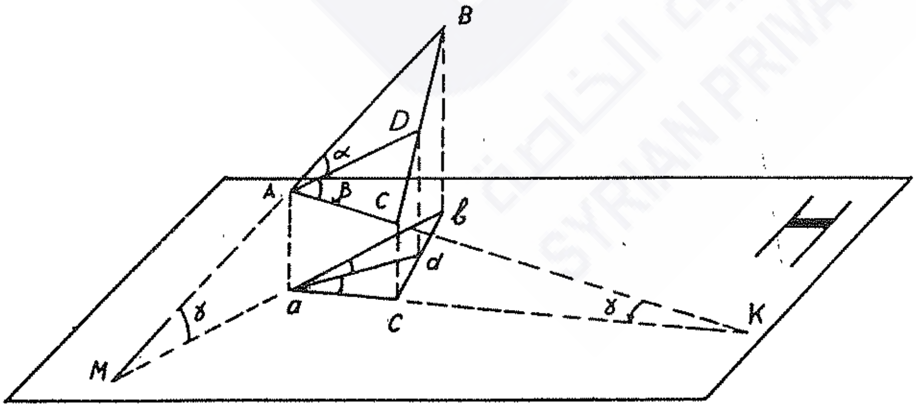
مع المستوي P في نقاط تقع مساقطها كلها على الفصل المشترك بين المستويين P و H (P_h) ، وسيكون أحد هذه المستقيمات وليكن AD ، موازيا للمستوي H • ففي هذه الحالة سيوازي ضلعا الزاوية BAD مستوي الاسقاط H ومن ثم تتساوى قيمة الزاوية الفراغية وقيمة مسقطها أي :

$\measuredangle$ bad = $\measuredangle$ BAD • ومن جهة أخرى تتساوى الزاوية BAD والزاوية BAC بالاختيار • ولما كان المستقيم AC لايوازي المستوي H فان مسقط النقطة C على المستوي H (c) سيقع على الفاصل المشترك P_h في نقطة أقرب الى النقطة b من النقطة d ، وبذلك تكون الزاوية bac والتي هي مسقط الزاوية BAC أصغر من الزاوية bad التي هي مسقط الزاوية BAD على الرغم من تساوي الزاويتين في الفراغ ، أي BAD = BAC

لكن bad > bac •

IV ـ٤ـ٦ـ اذا كان ضلعا الزاوية مائلين في زاوية واحدة على مستوي الاسقاط فان منصف زاوية المسقط على هذا المستوي يمثل مسقط منصف الزاوية في الفراغ •

لدينا الزاوية BAC (الشكل ٩٢) ضلعاها BA و AC يميلان في زاوية



شكل رقم (٩٢)

واحدة عن مستوي الاسقاط H ، أي $\measuredangle AKc = \measuredangle BMa$ ، ومسقطها يكـــون الزاوية bac • علما أن النقطتين B و C محددتان كيفيا على ضلعي الزاوية •

نرسم المستقيم ad منصفا للزاوية bac ، فنجد حسب قواعد المنصـف للزاوية الداخلية في مثلث أن : $\frac{ab}{ac} = \frac{bd}{dc}$ ، وكماهو معلوم من قاعدة تقسيم المستقيم بنسب محددة (IV ــ ٣) نجد أن لدينا : $\frac{bd}{cd} = \frac{BD}{DC}$ ، ولذلـك: $\frac{BD}{DC} = \frac{ab}{ac}$ ، ولكن $ab = AB \cos \gamma$ و $ac = AC \cos \gamma$ •

بعد التعويض عن هذه القيم نحصل اذن على : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB \cos \gamma}{AC \cos \gamma} = \frac{BD}{DC}$

ان هذا يعني أن المستقيم AD هو منصف الزاوية BAC ، وهو المطلوب •

IV ــ٤ــ٧ــ القاعدة المعاكسة الأولى :

اذا كان ضلعا الزاوية مائلين في زاوية واحدة عن مستوي الاسقاط ، فان مسقط منصف الزاوية في الفراغ ينصف زاوية مسقطها •

نرى من خلال الشكل (٩٢) أن المستقيم AD ينصف الزاوية BAC ، فنحصل على العلاقة : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ، ولكان كان $\frac{bd}{dc} = \frac{BD}{DC}$ فاننا نحصل على: $\frac{bd}{dc} = \frac{AB}{AC}$ •

ولما كانت الزوايا $\measuredangle BMa = \measuredangle AKc = \gamma$ فاننا نحصل في النهاية على $\frac{ab}{ac} = \frac{AB}{AC}$ وبالتالي لدينا : $\frac{bd}{dc} = \frac{ab}{ac}$ أي أن المستقيم ad هو منصـــف الزاوية BAC •

IV ــ٤ــ٨ــ القاعدة المعاكسة الثانية :

مسقط منصف الزاوية في الفراغ ينصف زاوية مسقطها اذا كان ميــلا ضلعي الزاوية بالنسبة لمستوي الاسقاط متساويين •

واذا مافترضنا من خلال الشكل (٩٢) أن المستقيم AD ومسقطـه ad ينصفان الزاوية BAC ومسقطها bac على التوالي ، فسيكون لدينا :

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ و $\frac{ab}{ac} = \frac{bd}{dc}$ ويكون لدينا أيضا وفق الفقرة (٤ ـ ٤)

من هذا الفصل : $\frac{bd}{dc} = \frac{BD}{DC}$ وبهذا نحصل على :

$$\frac{ab}{ac} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{ac}{AC} = \frac{ab}{AB}$$

لدينا من الشكل : $ab = AB \cos \measuredangle BMa$ و $ac = AC \cos \measuredangle AKa$

وبالتعويض نحصل على :

$$\frac{AC \cos \measuredangle AKc}{AC} = \frac{AB \cos \measuredangle BMa}{AB}$$

وهذا يعني أن : $\cos \measuredangle AKc = \cos \measuredangle BMa$

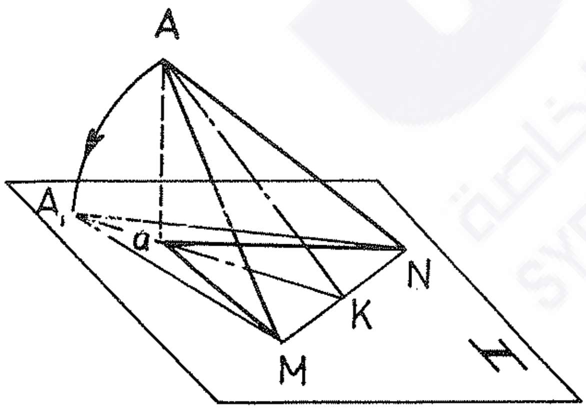
أي أن : $\measuredangle BMa = \measuredangle AKc = \gamma$ وهذا هو المطلوب اثباته •

١٧ ـ٤ـ٩ـ اذا كان ميل ضلعي زاوية ما بالنسبة لمستوي الاسقاط متساويا، فان قيمة زاوية لمسقط هذه الزاوية لايمكن ان تساوي قيمتها الفعلية •

لو افترضنا أن ميل ضلعي الزاوية MAN (الشكل (٩٣) بالنسبة لمستوي الاسقاط H متساو ، لوجدنا في هذه الحالة أن المثلثين M A N و MaN متساويا الساقين •

نرسم منصف الزاوية AK ،فيكون مسقط aK منصفا لزاوية MaN ،

ويمثل هذان المنصفان في الوقت نفسه ارتفاعي المثلثين MAN و MaN •



شكل رقم (٩٣)

من خلال المثلثين القائمين AKM و aKM نجد أن لدينا :

$$KM = aK\ tg\measuredangle MaK \quad , \quad KM = AK\ tg\measuredangle MAK$$

ولذا يكون : $AK\ tg\measuredangle MAK = aK\ tg\measuredangle MaK$

لكن $AK > aK$ لأن aK يمثل مسقط AK على مستوي الاسقاط H

وهذا مايتضح أيضا من خلال المثلث القائم MaK حيث AK يمثل وتر المثلث٠

ولذلك نجد أن : $tg\measuredangle MAK < tg\measuredangle MaK$ ، وهذا يعني أن :

$\measuredangle MAK < \measuredangle MaK$ وبالتالي تكون $\measuredangle MAN < \measuredangle MaN$ ،وهو المطلوب

ويمكن أن نثبت ذلك أيضا عندما نطبق الزاوية MAN على مستوي الاسقاط H بتدويرها حول المستقيم MN ٠ وفي هذه الحالة نلاحظ أن الزاوية MaN تكون داخل الزاوية MA_1N وأن رأسي الزاويتين a و A_1 يقعان على مستقيم واحد يعامد المستقيم MN ٠

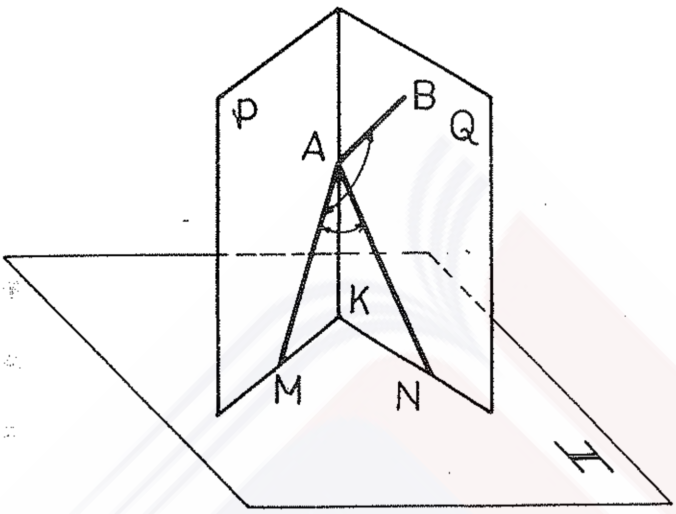
١٧ ـ ٤ ـ ١٠ ـ حالة خاصة :

" يمكن أن تساوي قيمة زاوية مسقط الزاوية الحادة أو المنفرجة القيمة الفعلية للزاوية المسقطة على الرغم من أن ضلعي الزاوية المسقطة لايوازيان مستوي الاسقاط " ٠

هذه الحالة ممكنة عندما يكون ضلعا الزاوية مستقيمين واقعين في مستويين أفقيين للاسقاط ، أي عندما يكونان عموديين على مستوي الاسقاط (الشكل ٩٤) ٠ ومن خلال هذا الشكل يتضح لنا أن لجميع الزوايا (سواء أكانت حادة مثل الزاوية MAN أم منفرجة مثل الزاوية MAB) مسقطا مشتركا واحد تمثله الزاوية MKN وامتدادات ضلعيها ٠

ومن الواضح أن قيم الزوايا المسقطة يمكن أن تتراوح بين الصفر

و ١٨٠° درجة ، وهذا يعني أن احدى هذه القيم ستساوي قيمة زاوية المسقط ٠



شكل رقم (٩٤) ٠