

الفصل الثامن

اختبارات الفروض الإحصائية

مقدمة:

يتعرض الإنسان في كثير من الحالات وفي مجالات العمل الى مواقف معينة تتطلب منه اتخاذ قرار بناء على معلومات محسوبة من عينه ، وعليه يجب اتخاذ هذا القرار بأقل قدر ممكن من الخطأ.

مثال 1: نفرض أن باحثا اجتماعيا ادعى ان متوسط اعمار طلاب الجامعة لا يختلف عن متوسط أعمار الطالبات. للتأكد من ذلك فإن الشئ الطبيعي أن نقوم بحصر اعمار الطلاب والطالبات ومنها نحسب المتوسط لكل منهما ثم نقرر من منهما اكبر..ولكن عملية الحصر صعبة ومجهددة لذلك نضطر الى اختيار عينة عشوائية من بين الطلاب وعينة عشوائية من بين الطالبات ونحسب متوسط العمر في كل عينة منهما,,,فإذا كان متوسط عمر الطالب هو 24 وكان متوسط عمر الطالبة هو 22 فهل يعني ذلك ان متوسط عمر الطالب اكبر من متوسط عمر الطالبة؟؟ هل الفرق راجع لمجرد الصدفة؟؟ متى يكون الفرق نتيجة للصدفة؟؟ متى يكون الفرق دالا على وجود اختلاف حقيقي أو جوهري بين متوسطي المجتمعين الأصليين ..

مفاهيم مهمة :

هناك بعض المفاهيم المتعلقة باختبارات الفروض لابد من معرفتها:

الفرض الاحصائي statistical hypothesis

هو عبارة عن إدعاء او تخمين معين حول معلمة من معالم المجتمع ويكون المطلوب اختبار صحة هذا الادعاء أو التخمين ...هناك نوعين من الفروض :

- فرض العدم (null hypothesis) ويرمز له بالرمز H_0 ويصاغ في صورة عدم وجود فرق أو عدم وجود علاقة أو عدم وجود تغير – مثال : في مثال أعمار الطلاب وطالبات الجامعة فإن فرض العدم هو

H_0 : نفترض عدم وجود اختلاف بين متوسطي اعمار الطلاب والطالبات

- الفرض البديل (alternative hypothesis) ويرمز له بالرمز H_1 وهو الفرض الذي يجب أن يكون صحيحا اذا كان فرض العدم غير صحيح – مثال : في مثال أعمار الطلاب وطالبات الجامعة فإن الفرض البديل هو

H_1 : يوجد اختلاف حقيقي وليس ظاهري بين متوسط اعمار الطلاب والطالبات .

مستوى المعنوية α ودرجة الثقة $(1 - \alpha)$:

- إن القرار الذي سوف نتخذه بناء على الاختبار الإحصائي لا يمكن اعتباره صحيح % 100 فهناك مقدار من الخطأ لأن المعلومات التي نتخذ قرارنا بناء عليها بيانات مأخوذة من عينة وليس من المجتمع الأصلي
- في اختبار فرض معين، فإن مقدار ثقتنا في القرار المتخذ بالفرض أو القبول يسمى بدرجة الثقة ويرمز له بالرمز $(1 - \alpha)$ كما وأن مقدار عدم الثقة أو مقدار الخطأ يسمى بمستوى المعنوية ويرمز له بالرمز α

وعادة يحدد الباحث مستوى المعنوية أو درجة الثقة قبل البدء في عملية الاختبار.

عند اختبار فرض العدم H_0 ضد الفرض البديل H_1 نجد أننا امام احدى الحالات الاربع الاتية :

	H_0 خطأ	H_0 صحيح
قبول H_0	خطأ من النوع الثاني	قرار سليم
رفض H_0	قرار سليم	خطأ من النوع الاول

(1) أن يكون فرض العدم صحيحا ويكون القرار بقبولهوهذا قرار سليم

(2) أن يكون فرض العدم صحيحا ويكون القرار برفضه وهذا قرار خاطئ

- (الخطأ من النوع الأول : رفض H_0 عندما يكون H_0 صحيحاً ويرمز لحجم هذا الخطأ بالرمز α)
- (3) أن يكون فرض العدم خطأ ويكون القرار برفضه وهذا قرار سليم
- (4) أن يكون فرض العدم خطأ ويكون القرار بقبوله .. وهذا قرار خاطئ (الخطأ من النوع الثاني : قبول H_0 عندما يكون H_0 خاطئاً ويرمز لحجم هذا الخطأ بالرمز β)

- احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول يسمى مستوى المعنوية ويرمز له بالرمز α أي ان α = احتمال رفض فرض العدم H_0 عندما يكون صحيح = مستوى المعنوية

- احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني يرمز له بالرمز β أي أن β = احتمال قبول فرض العدم H_0 عندما يكون خطأ

خطوات اختبار الفرض الإحصائي حول متوسط المجتمع لعينة كبيرة

لإجراء الاختبار الإحصائي فإننا نتبع الخطوات التالية :

1- صياغة فرض العدم H_0

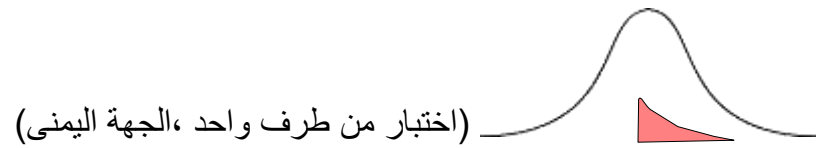
$$H_0 : \mu = \mu_0$$

والفرض البديل هو احد الحالات التالية :

$$H_1: \mu \neq \mu_0 -1$$



$$H_1: \mu > \mu_0 -2$$



$$H1: \mu < \mu_0 -3$$



2- تحديد قيمة احصاءة الاختبار (قيمة Z المحسوبة):

حيث أن هذا الاحصاءة يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا قياسياً

$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_O}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

3- تحديد القيمة الجدولية و تحدد على حسب نوع الاختبار وقيمة α :

نوع الاختبار	مستوى المعنوية α	درجة الثقة $(1-\alpha)$	الدرجة المعيارية
اختبار من طرفين	5% = 0.05	95% = 0.95	$= Z_{\alpha/2} \pm 1.96$
	1% = 0.01	99% = 0.99	$= Z_{\alpha/2} \pm 2.58$

$$95\% = 0.95$$

نوع الاختبار	مستوى المعنوية α	درجة الثقة $(1-\alpha)$	القيمة الجدولية (القيمة الحرجة)
اختبار من طرف واحد (الجهة اليمنى)	5% = 0.05	95% = 0.95	$= 1.64 \alpha Z$
	1% = 0.01	99% = 0.99	$= 2.33 \alpha Z$
اختبار من طرف واحد (الجهة اليسرى)	5% = 0.05	95% = 0.95	$= -1.64 \alpha Z$
	1% = 0.01	99% = 0.99	$= -2.33 \alpha Z$

4- اتخاذ القرار:

نتخذ القرار بناءً على قيمة احصاء الاختبار

نرفض H_0 إذا وقعت قيمة احصاء الاختبار في منطقة الرفض

لا نرفض H_0 إذا وقعت قيمة احصاء الاختبار في منطقة القبول

إذا كان الاختبار من طرفين : نقبل فرض العدم إذا تحققت المعادلة التالية : $-Z_{\alpha/2} < Z_C < Z_{\alpha/2}$

نرفض فرض العدم إذا تحققت إحدى المعادلتين : $Z_C > Z_{\alpha/2}$
 $Z_C < -Z_{\alpha/2}$

إذا كان الاختبار من طرف واحد الجهة اليمنى :

نقبل فرض العدم إذا تحققت المعادلة : $Z_C < Z_{\alpha}$

نرفض فرض العدم إذا تحققت المعادلة : $Z_C > Z_{\alpha}$

إذا كان الاختبار من طرف واحد الجهة اليسرى :

نقبل فرض العدم إذا تحققت المعادلة : $Z_C > -Z_{\alpha}$

نرفض فرض العدم إذا تحققت المعادلة : $Z_C < -Z_{\alpha}$

مثال (1):

شركة متخصصة في صناعة لعب الأطفال تعاقدت لشراء نوع جديد من الخيوط الصناعية، يدعي صانع هذه الخيوط أن متوسط قوة تحمل الخيط 15 كغم بانحراف معياري نصف كغم . ولاختبار صحة ادعاء الصانع أخذت عينة عشوائية من 50 خيطاً وتم اختبارها فوجد أن متوسط قوة التحمل في العينة 14.8 كغم . فهل يمكننا تأييد ادعاء المدير؟ استخدم مستوى معنوية 5 % .

الحل:

$$\begin{aligned} n &= 50 & \mu_0 &= 15 \text{ kg} \\ \bar{X} &= 14.8 \text{ kg} & \sigma &= 0.5 \text{ kg} \end{aligned}$$

1- صياغة الفرض الإحصائي:

الفرض العدم : عدم وجود فرق معنوي بين متوسط الخيوط القديمة والحديثة
 $H_0: \mu = 15$
ضد

الفرض البديل : وجود فرق معنوي بين متوسط الخيوط القديمة والحديثة
 $H_1: \mu \neq 15$
 حيث μ هي متوسط قوة تحمل الخيط .

2- إيجاد قيمة إحصاء الاختبار:

لان σ مجهولة والعينة كبيرة فانه يمكن استخدام S بدلاً من σ :

$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{14.8 - 15}{\frac{0.5}{\sqrt{50}}} = -2.83$$

3- تحديد القيمة الجدولية :

$$Z_{\alpha/2} = \pm 1.96$$

4- اتخاذ القرار:

بما أن القيمة المحسوبة وقعت في منطقة الرفض، فإن القرار هو: رفض فرض العدم
أي أن الادعاء غير صحيح وأن هناك فرق معنوي بين المتوسط الحقيقي والمتوسط المدعى.

مثال (2) :

إذا كان من المعروف أن جسم الإنسان البالغ يحتاج يوميا في المتوسط 800 ميللغرام من الكالسيوم لكي يقوم بوظائفه خير قام. ويعتقد احد علماء التغذية أن الأفراد ذوي الدخل المنخفض لا يستطيعون تحقيق هذا المتوسط , ولاختبار ذلك تم اختيار عينة من 50 شخصا بالغاً من بين ذوي الدخل المنخفض فكان متوسط ما يتناوله من كالسيوم يوميا هو 755.3 ميللغرام والانحراف المعياري هو 239.3 ميللغرام. فهل تدل هذه النتائج على أن متوسط ما يتناوله الأشخاص البالغون من ذوي الدخل المنخفض من كالسيوم يقل عن 800 ميللغرام؟
استخدم مستوى معنوية 0.05

الحل :

1- صياغة الفرض الإحصائي:

فرض العدم هو

$$H_0: \mu = 800$$

والفرض البديل

$$H_1: \mu < 800$$

حيث μ هي متوسط ما يتناوله الإنسان البالغ ذوي الدخل المنخفض من الكالسيوم .

2- إيجاد قيمة إحصاء الاختبار :

لأن σ مجهولة والعينة كبيرة فانه يمكن استخدام $s=239.3$ بدلا منها . وبالتعويض نجد ان قيمة احصاء الاختبار هي

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{755.3 - 800}{239.3/\sqrt{50}} = -1.32$$

3- تحديد القيمة الجدولية :

ونلاحظ هنا أن الاختبار ذو جانب (طرف) واحد هو الجانب (الطرف) الأيسر وحيث أن مستوى المعنوية $\alpha=0.05$ فإنه من جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن القيمة الحرجة هي :

$$Z = -1.64\alpha$$

4- اتخاذ القرار:

بما أن قيمة الاحصاء -1.32 اكبر من القيمة الحرجة -1.64 وهي تقع في منطقة القبول وبالتالي فإننا لانرفض فرض العدم H_0 وهو أن متوسط ما يتناوله الإنسان البالغ ذو الدخل المنخفض من الكالسيوم يساوي 800 ميللجرام .

مثال (3) :

في عينة عشوائية مكونة من تسجيل 100 حالة وفاة في قرية معينة تبين أن متوسط العمر في العينة 67.5 عاما والانحراف المعياري 8 أعوام. فهل هذا يوضح أن متوسط العمر في هذه القرية اكبر من 65 عاما ؟ تحت مستوى معنوية 5 %.

الحل:

نفرض أن μ متوسط العمر في هذه القرية .

1- صياغة الفرض الإحصائي:

$$H_0 : \mu = 65$$

$$H_1 : \mu > 65$$

2- إيجاد قيمة إحصاء الاختبار:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{67.5 - 65}{8/\sqrt{100}} = 3.125$$

3- تحديد القيمة الجدولية :

ونلاحظ هنا أن الاختبار ذو جانب (طرف) واحد هو الجانب (الطرف) الأيمن وحيث أن مستوى المعنوية $\alpha=0.05$ فإنه من جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن القيمة الحرجة هي :

$$\alpha Z = 1.64$$

4- اتخاذ القرار:

نجد أن قيمة Z المحسوبة 3.125 اكبر من القيمة الجدولية 1.64 لهذا فإن Z المحسوبة تقع في منطقة

الرفض لهذا فإن القرار هو رفض H_0

ونستنتج من ذلك أن متوسط العمر في هذه القرية اكبر من 65 عاما .