تعرفنا في الفصل السابق إلى كيفية الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ذات المتغيرين باستخدام طريقة الحل البياني، إلا أن واقع حال المشاكل التي تواجهها المؤسسات تتصف بالتعقيد والتشابك مما يجعلها بحاجة إلى عدد كبير من القيود والمتغيرات التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند عملية صنع القرار.لذلك لا بد من استخدام طريقة أخرى أشمل وأسهل من طريقة الحل البياني.

طريقة السمبليكس وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبرياً مهما كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداماً لحل النماذج الرياضية[1].

تعمل هذه الطريقة بشكل مشابه تماماً للطريقة البيانية في كيفية الوصول للحل الأمثل، حيث تقوم هذه الطريقة بفحص ذروات منطقة الإمكانات بشكل متسلسل وباستخدام مفاهيم رياضية بسيطة، ويتم بشكل متكرر، وهذا يعني إعادة نفس الإجراءات مرة تلو الأخرى ولحين الوصول للحل الأمثل.

I- آلية عمل طريقة السمبليكس:

في حالة وجود أكثر من ثلاث متغيرات في مشكلة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية وإنما علينا استخدام طرقة أخرى المسماة بالسمبليكس التي ابتكرها دانزاك (Geroge Dantzig) عام 1947 وهي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية ويعتمد هذا الأسلوب على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف والقيود[2].

I-1- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية (القياسية):

قبل الحل بطريقة النموذج بطريقة السمبليكس، وتحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية، علينا أولاً معرفة أنواع الصيغ التي يمكن كتابة البرنامج الخطي على أساسها.

[1]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 53.

[2]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 45.

I-1-1-الصيغة القانونية والمختلطة للبرنامج الخطي[1]:

- **الصيغة القانونية:**

هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية وهي حسب الحالة كما يلي:

أ. **حالة التعظيم:** في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

- دالة الهدف تكون في حالة تعظيم؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي[2]:

$$Max(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots\dots C_nx_n$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots a_{in}x_n \le b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_1; x_2; \dots\dots\dots\dots\dots; x_n \ge 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Max(z) = C'X$$

$$s/c$$

$$\{AX \le B$$

$$X \ge 0$$

حيث: C' يعبر عن سطر معاملات دالة الهدف، A تعبر عن مصفوفة القيود، أما B فتعبر عن شعاع الثوابت .

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص 41.

[2]- J.M.Boussard, J. J.Daudin ," **la programmation linéaire dans les modèles de production**",Masson , Paris, 1998 . P 27 .

ب. **حالة التدنئة:** فحتى يأخذ البرنامج الخطي شكل الصيغة القانونية يجب أن يتميز بما يلي:

- دالة الهدف تكون في حالة تدنئة ؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي:

$$Min(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots C_nx_n$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{in}x_n \geq b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_1; x_2; \ldots\ldots\ldots\ldots; x_n \geq 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Min(z) = C'X$$

$$s/c$$

$$\{AX \geq B$$

$$X \geq 0$$

- **الصيغة المختلطة:** وشروط هذه الصيغة:
  - أن تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل تعظيم أو تدنئة؛
  - أن تكون القيود مكتوبة بإشارة أقل أو يساوي أو أكبر أو يساوي أو هيأة معادلة أي مساواة؛
  - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة المختلطة تكتب كما يلي[1]:

[1]- Mustapha Nabil ," **recherche opérationnelle et *Mathématiques appliqués* a la gestion des entreprises**",Dunod, France,1985 , p 31 .

$$
\begin{aligned}
&Min\_or\_Max(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots C_nx_n \\
&s/c \\
&\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n \geq,=,\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots a_{2n}x_n \geq,=,\leq b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots a_{in}x_n \geq,=,\leq b_i \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots a_{mn}x_n \geq,=,\leq b_m
\end{cases} \\
&x_1; x_2; \dots\dots\dots; x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

I-1- 2– الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي:

وفيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنئة، تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية، بإعتبار ذلك أول خطوة في إتجاه الحل.

تتطلب الخطوة الأولى في الطريقة السمبليكس تحويل القيود من صيغة متراجحات إلى صيغة معادلات كالأتي[1]:

- إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي يتم إضافة متغير مكمل إلى الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " أو المتغير الزائد أو المتغير الراكد ويرمز له بالرمز (S_i ;i=1,2,……m) ويظهر هذا المتغير بمعامل صفر في دالة الهدف، ويمثل المتغير الفجوة موارد غير مستخدمة مثل الوقت المستغرق على الآلة، ساعات العمل، الأموال، ساحات المحزن، أو أي من الموارد في المشكلات التي تواجهها المؤسسات. إذا كان القيد مثلا كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n \leq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n + S_1 = b_1$$

- إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي يتم طرح متغير فائض من الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " ويرمز له بالرمز (S_i ;i=1,2,……m) ثم نضيف متغير وهمي أو اصطناعي

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 70 .

(Artificielle) إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)، ويظهر المتغير الفجوة بمعامل صفر في دالة الهدف، أما **المتغير الاصطناعي** فيظهر بمعامل (M) في دالة الهدف والتي ترمز إلى معامل رقمي كبير جداً، أما إشارتها في دالة الهدف فتكون موجبة(M+)عندما تكون دالة الهدف تخفيض أو تقليل، أما إذا كانت دالة الهدف تعظيم فإن إشارتها تكون سالبة (M−). فمثلا إذا القيد على الشكل التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n \geq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n - S_1 + A_1 = b_1$$

تضاف المتغيرات الاصطناعية إلى المتراجحات الخطية التي تفصل بين طرفيها علامة من نوع أكبر أو يساوي أو المساواة وذلك بهدف الحصول على الحل الأساسي الممكن، وبعد أن يتم الحصول على هذا الحل (الحل الممكن) يجب أن يتم التخلص من هذه المتغيرات وأبعادها عن النموذج (كما سيأتي شرحه في حالة طريقة M الكبيرة أو Big−M)[1].

- إذا كانت إشارة القيد يساوي (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)، والجدول التالي يبين القواعد السابقة:

إشارة القيد	الإجراء على القيد	دالة الهدف تدنئة (Min)	دالة الهدف تعظيم (Max)
اقل من أو يساوي	$+1S_i$	$+0S_i$	$+0S_i$
أكبر من أو يساوي	$-1S_i+1A_i$	$1S_i+MA_i$	$1S_i-MA_i$
يساوي	$+1A_i$	$+MA_i$	$-MA_i$

مثال رقم (01): أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي الأتي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص54 .

الحل: القيد الأول عبارة عن قيد مساواة إذن:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + A_1 = 10$$

القيد الثاني يحمل إشارة أكبر من أو يساوي إذن:

$$x_2 + x_3 \geq 4 \Rightarrow x_2 + x_3 - S_1 + A_2 = 4$$

القيد الثالث حمل إشارة أصغر من أو يساوي ومنه:

$$x_1 + x_3 \leq 5 \Rightarrow x_1 + x_3 + S_2 = 5$$

أما دالة الهدف تصبح على النحو التالي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

I-2- إعداد جدول الحل الأولي:

تبدأ الطريقة السمبليكس بحل الأولي ممكن حيث تكون قيم جميع المتغيرات الحقيقية (مثل) مساوية لـ(0)، ينتج عن هذا الحل الإعتيادي ربحاً مقداره (0)، وتبدأ الطريقة المبسطة عند هذه النقطة ومن ثم سنتحرك نحو بقية النقاط عند الأركان الأخرى إلى أن نصل إلى الحل الأمثل[1] .

تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) للحصول على حل أولي ممكن والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الحل البياني، ويكون تنظيم بيانات الشكل الصيغة النموذجية من حالة دالة التعظيم في جدول الحل الأولي كما هو مبين في الجدول التالي:

[1] -P.Chrétienne, Y.Pesyuex, G.Raudjean ," **Algorithmes et pratique de programmation linéaire**", édition telmic, Paris, 1980. P 17 .

T_1	C_J	C_1	C_2	....	C_n	0	0	....	0	
CB	XB	X_1	X_2	....	X_n	S_1	S_2	....	S_m	B
0	S_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	1	0	....	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	0	1	....	0	b_2
:	:	:	:	....	:	:	:	....	:	:
0	S_i	a_{i1}	a_{i2}	....	a_{in}	0	0	....	0	b_i
:	:	:	:	....	:	:	:	....	:	:
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	0	0	....	1	b_m
Z_J		0	0	....	0	0	0	....	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		C_1	C_2	....	C_n	0	0	....	0	Z=0

حيث:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z = CB'B$$

نلاحظ أن متغيرات الأساس الموضوعة في العمود الثاني من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة (1) من أعمدة المصفوفة الأحادية، وتكون في الجدول الحل الأساسي الأول إما متغيرات فجوة أو متغيرات لإصطناعية أو هم معا، وفي المراحل اللاحقة تزيحها الخوارزمية، وتحل محلها متغيرات أخرى.

وفي هذا الجدول تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة لها في العمود الأخير(عمود الثوابت)، أي : $(S_1 = b_1 ; S_2 = b_2 ;\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots \ S_m = b_m)$

أما قيمة الدالة الإقتصادية فهي معدومة، أما بقية عناصر السطر الأخير فتعبر عن تغير معاملات دالة الهدف طيلة مراحل الحل.

مثال رقم (02): أوجد الصيغة النموذجية والجدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

✓ الصيغة النموذجية:

تصبح القيود أعلاه كما يأتي:

القيد الأول: $$2x_1 + x_2 + S_1 = 100$$

القيد الثاني: $$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 240$$

وهذا يعني بأن عدد ساعات المستخدمة كانت أقل من 100 ساعة بالنسبة للقيد الأول و240 ساعة بالنسبة للقيد الثاني.

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

✓ جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج:

المتغيرات الغير الأساسية

T_1	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
0	S_1	2	1	1	0	100
0	S_2	4	3	0	1	240
Z_J		0	0	0	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		7	5	0	0	Z=0

المتغيرات الأساسية

يطلق على الحل الإبتدائي مصطلح " الحل الممكن الأساسي " ويوصف بالصيغة الآتية:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$$ هذا هو الحل الممكن الأساسي بصيغة الأعمدة.

المتغيرات التي يطلق عليها **بالمتغيرات الأساسية** في البرمجة الخطية هي (S_1,S_2)، أما المتغيرات التي لا يضمها مزيج الحل أو غير الأساسية (X_1,X_2) في مثالنا يطلق عليها **المتغيرات غير الأساسية**.

I-3- إجراءات الحل بطريقة السمبليكس:

إنطلاقا من الجدول الأول نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني " الجدول الثاني" وذلك بإختيار المتغيرة التي تدخل الأساس والمتغيرة التي تخرج من الأساس وكذلك **عنصر الإرتكاز**.

سندرج فيما يأتي الخطوات ثم نشرحها بدقة ونطبقها لإستكمال الجدول الثاني والثالث للحل[1]:

- **الخطوة (01):** تحديد المتغير الذي سيدخل مزيج الحل لاحقاً، و إحدى الطرق للقيام بذلك هو عن طريق تحديد العمود، ويتم على أساس قيم صف تقيم الحل $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) نختار المتغير صاحب أعلى قيمة موجب في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ ويسمى العمود الذي يقع فيه بالعمود المحوري أو **بعمود عنصر الإرتكاز** (Pivot Column)، ومن ثم المتغير أكبر قيمة موجبة في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ في الجدول السابق، هذا يعني أننا سننتج الآن بعض المنتجات التي ستسهم في تحقيق أعظم ربح إضافي للوحدة الواحدة. من جدول الحل الأولي للمثال السابق رقم (02) نجد أن قيمة المتغير (X_1) في الصف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ تساوي (7) وهي أعلى قيمة موجبة وهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من (X_1) لمزيج الحل سيساهم بزيادة الربح بمقدار (7) دينار، أما المتغيرة (X_2) فإن القيمة المقابلة له في الصف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ كانت (5) دينار فقط، أما المتغيرتين $(S_1 ;S_2)$ فكانت قيمها المقابلة في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ صفر لكل منهما، وهذا يعني أن دخولهما مزيج الحل سوف لن يضيف أي شيء للربح المتوقع، وعليه سنختار المتغير (X_1) ليكن المتغير الداخل، وعليه سيكون العمود الذي يحتويه هو عمود الإرتكاز؛
- **الخطوة (02):** نحدد المتغير الذي سيتم استبداله (المتغير الخارج)، لإننا إخترنا متغير جديد سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد أي من المتغيرات الأساسية الحالية ينبغي أن يخرج ويتم إنجاز هذه الخطوة عن طريق قسمة قيم عمود الكميات (B) على قيم عمود المحور الإتكاز (القيم فقط الموجبة والغير معدومة) الذي تم إختياره في الخطورة (01)، الصف الذي يحقق أقل قيمة موجبة سيتم إستبداله في الجدول اللاحق(هذا الرقم الأقل قيمة موجبة بالمناسبة يعطي أكبر رقم من الوحدات للمتغير الذي سيحل محله في الحل)، ويشار إلى هذا الصف بـ الصف المحور أو **صف الإرتكاز** (Pivot Row)، الرقم الذي يقع ضمن نقطة تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز يشار له بـ العنصر المحوري أو **عنصر الإرتكاز** (Pivot Number)، طالما أن المتغير (X_1) سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيتم إستبداله سيكون هناك عددا من المتغيرات الأساسية بقدر عدد القيود في مشكلة البرمجة الخطية، وعليه فإما (S_1) أو (S_2)

---

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص ص : 153-157.

سيخرج من جدول الحل ليحل محله المتغير الداخل (X_1) كمتغير أساسي ولتحديد صف الإرتكاز، فإننا سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$Min\left\{\frac{100}{2}=50\,,\frac{240}{4}=60\right\}=Min\,\{50\,,60\}=50$$

الرقم الموجب الأصغر يشير إلى أعظم رقم من الوحدات من (X_1) يمكن إنتاجها دون أن ينتهك أي من القيود الأصلية، إنها أيضا تشير إلى أن الصف الإرتكاز سيكون الصف الأول الذي يقابل النسبة (50)، هذا يعني أن بأن (S_1) سيكون المتغير الذي سيتم استبداله في هذه الخطوة، أما عنصر الإرتكاز هو الرقم الذي يقع عند تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز وهو يقع في الصف الأول والعمود الأول وهو (2).

ولتوضيح ما سبق في الخطوة رقم (01) و (02) في الجدول الأولي السابق كالآتي:

عنصر الإرتكاز

T_1	C_J	7	5	0	0	B	$\frac{B}{X_1}$
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	2	1	1	0	100	50
0	S_2	4	3	0	1	240	60
Z_J		0	0	0	0		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		7	5	0	0	Z=0	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

- **الخطوة (03):** يتم تعديل جدول الأولي بتكوين جدول جديد عن طريق إجراء بعض التعديلات على مصفوفة المعاملات في جدول الحل الأولي، حيث يرتبط الجدول الجديد بجدول الحل الأولي باعتبار الجدول الجديد مرحلة لاحقة لجدول الحل الأولي، وتتلخص إجراءات تكوين الجدول الجديد بما يلي:

- تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، ويسمى الصف الناتج بصف العمل (Working Row)
من المثال السابق لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1 = \left(\frac{2}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{0}{2};\frac{100}{2}\right) = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right)$$

ستظهر القيم الجديدة لصف الإرتكاز بأكمله في الجدول الجديد، ونلاحظ بأن (X_1) سيظهر في مزيج الحل وأنه سيتم إنتاج (50) وحدة من (X_1)، وهذا سيحقق حتماً ربحاً أكبر من (0) كما هو الحال في جدول الحل الأولي.

T_2	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
7	X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50

الصف الأول الجديد

- تحتسب قيم الصفوف الأخرى باستخدام القواعد التالية:

قيم الصف الجديدة = القيم الحالية (القديمة) للصف – (الرقم المناظر للرقم الإرتكاز X الرقم المقابل في صف العمل). أما الرقم المناظر للرقم الإرتكاز هو الرقم الذي يقع أسفل أو أعلى الرقم الإرتكاز.

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$S_2 = (4;3;0;1;240) - 4\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right) = (0;1;-2;1;40)$$

T_2	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
0	S_2	0	1	−2	1	40

الصف الثاني الجديد

- **الخطوة (04):** وبعد الإنتهاء من عملية الحساب قيم الصفوف تتم عملية اختبار أمثلية الحل، لكن لابد من إجراء الخطوة الأخيرة لإكمال الجدول الثاني واختبار الحل هو إستخراج تأثير دالة الهدف وتتضمن هذه الخطوة حساب قيم كلا من صف (Z_J) و ($\Delta Z = C_J - Z_J$)، ونكرر بأن دخول (Z_J) في عمود الكميات يعطينا إجمالي الربح الذي يتحقق من الحل الحالي، أما بقية

قيم (Z_J)، فإنها تمثل إجمالي الربح المتحقق من إضافة وحدة واحدة من كل متغير إلى الحل الجديد وتحتسب قيم (Z_J) كما يأتي:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z_J = (7 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = (7 \quad 0)\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix} = 350$$

وسيتم وضع قيم (Z_J) و (ΔZ)، في الجدول الحل الثاني وكما مبين في الجدول التالي:

T_2	C_J	7	5	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X_2}$
7	X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50	100
0	S_2	0	1	-2	1	40	40
Z_J		7	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	Z=350	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-7}{2}$	0		

إن الحل الحالي يشير إلى أن الشركة حتى الآن ستقوم بإنتاج 50 وحدة من (X_1)، و(0) وحدة من (X_2)، لتحقق ربحاً مقداره 350 دينار، (X_1) هو متغير أساسي، أما (X_2) فهو متغير غير أساسي، أما المتغيرة الفجوة (S_2) تبين كمية الوقت غير المستخدم، وهو أحد المتغيرات الأساسية وقيمته هي 40، وهذا يعني أن 40 ساعة لا تزال موجودة، أما المتغيرة الفجوة (S_1) فهو متغير غير أساسي لذا فإن عدد الساعات يساوي (0).

أن الصف (ΔZ) مهماً بالنسبة لنا لسببين: الأول إنه يشير إذا ما كان الحل الحالي هو **الحل الأمثل** أم لا ؟ فعندما لا تكون هناك قيم موجبة في الصف، فهذا يعني الوصول للحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، وفي مثالنا ومن خلال القيم الموجودة في الصف (ΔZ) في الجدول نجد بأن قيم (X_1)

و(S_1) و(S_2) سالبة أو صفرية، أما قيمة (X_2) فهي $(\frac{3}{2})$ وهذا يعني بأن صافي الربح يمكن أن يزيد بمقدار $(\frac{3}{2})$ لكل وحدة مضافة على الحل الحالي.

ولأن قيمة (X_1) في صف (ΔZ) تساوي الصفر، فهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من (X_1) سوف لن يضيف شيئاً إلى الربح، لذا فإنه سيبقى دون تغيير.

طالما أنه لم تكن جميع القيم في الصف (ΔZ) في الجدول الأخير سالبة أو معدومة، لذا فإن هذا الجدول لا يمثل جدول الحل الأمثل، وينبغي أن نعيد خطوات السمبليكس السابقة الذكر.

سيدخل المتغير (X_2) الحل اللاحق لأنه يحمل أكبر قيمة موجبة في الصف (ΔZ) بل إنه القيمة الوحيدة في الصف، هذا يعني أنه سيكون عمود (X_2) هو عمود الإرتكاز، تتضمن الخطوة الموالية تحديد صف الإرتكاز وستقسم قيم عمود الكميات المتاحة على عمود الإرتكاز القيمة الأصغر هي لـ(S_2)، وعليه سيغادر عمود المتغيرات الأساسية ليحل محله المتغير (X_2)، وقيمة عنصر الإرتكاز هي (01) كما هي موضحة في الجدول السابق.

- **الخطوة (05):** تطوير جدول الحل الثالث ويتم استبدال صف الإرتكاز من خلال قسمة كل رقم فيه على العنصر الإرتكاز هو (1)، ولأن القسمة على (1) لذا سوف لن تتغير القيم، وعليه ستكون قيم المتغير الداخل في جدول الحل الجديد لذي سيحل محل المتغير الخارج (S_2).

T_3	**C_J**	**7**	**5**	**0**	**0**	
CB	**XB**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**B**
5	**X_2**	0	1	-2	1	40

القيم الجديدة لصف (X_1) يمكن حسابها الآن كما يأتي:

$$X_1 = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right) - \frac{1}{2}\left(0;1;-2;1;40\right) = \left(1;0;\frac{3}{2};\frac{-1}{2};30\right)$$

وهكذا ستكون قيم صف (X_1) والتي ستظهر في الجدول الحل الثالث مبينة بالآتي:

T_3	**C_J**	**7**	**5**	**0**	**0**	
CB	**XB**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**B**
7	**X_1**	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	30

وأخيراً صفي تحسب في الجدول الثالث كما يأتي:

$$Z_J = CB' X_J S_J$$

$$Z_J = \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = 410$$

ومنه جدول الحل الثالث هو كالآتي:

T_3	C_J	7	5	0	0	
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	**B**
7	X_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	30
5	X_2	0	1	-2	1	40
Z_J		7	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	**Z=410**
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	

جدول الحل الأمثل لأن: $\Delta Z \leq 0$

بما أن (ΔZ) في الجدول الحل الثالث سالبة أو معدومة، ذلك يعني أنه تم الوصول للحل الأمثل والحلول هي كما يلي:

$$X_1 = 30; X_2 = 40; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 410$$

وعادة يحتمل أن تكون هناك أخطاء رياضية عند المرور بخطوات السمبليكس المتعددة وعليه ستكون فكرة جيدة التحقق من الحل النهائي الذي توصلت إليه، ويمكن أن يتم ذلك في جزء عن طريق النظر إلى القيود ودالة الهدف .

القيد الأول: محقق تماما

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \Rightarrow 2(30) + 40 = 100$$

القيد الثاني: محقق تماماً

$$4x_1 + 3x_2 \leq 240 \Rightarrow 4(30) + 3(40) = 240$$

دالة الهدف: الربح

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 = 7(30) + 5(40) = 410$$

II- تطبيق طريقة السمبليكس على مشكلة التدنئة أو التقليل:

في حالة التدنئة تكون القيود من النوع أكبر أو تساوي فتطرح متغيرات الفجوة من الطرف الأيسر وذلك للايفاء بشرط الصيغة النموذجية، ولهذا السبب يستعان بمتغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الإصطناعية تضاف إلى النموذج بعد طرح المتغيرات الفجوة وذلك لإمكانية الحصول على الحل الممكن وكذلك عندما تكون القيود من نوع مساواة تضاف المتغيرات الإصطناعية لنفس السبب، ولقد سبق لنا في هذا الفصل شرح كيف يتم معاملات المتغيرات الاصطناعية لإيجاد الصيغة النموذجية.

وبعد الحصول على الحل الممكن، يجب التخلص من هذه المتغيرات (الإصطناعية) وإبعادها عن جداول السمبليكس، لأن بقاءها في مراحل حل السمبليكس هو علامة غير صحيحة للحصول على الحل الأمثل أو بصيغة أخرى عند بقائها لا يمكن الحصول على الحل الأمثل[1].

تشبه مشكلات التقليل إلى حد بعيد مشكلات التعظيم التي تناولناها أيضا في هذا الفصل، الفرق بينهما يكمن في صف (ΔZ) طالما أن هدفنا الآن هو تقليل التكاليف، فإن المتغير الجديدة الذي سيدخل إلى جدول الحل (عمود الإرتكاز) سيكون المتغير الذي يمثل **أكبر قيمة بإشارة سالبة** في الصف (ΔZ)، وهكذا فإننا سنختار المتغير الذي يقلل التكاليف بأكبر قدر ممكن، ويتم الوصول للحل الأمثل في مشكلات التقليل عندما تكون جميع القيم في صف (ΔZ) **موجبة أو معدومة** تماماً عكس ما هو عليه في حالات التعظيم، جميع خطوات السمبليكس الأخرى كما سنراها لاحقاً ستبقى كما في حالات التعظيم.

وهناك طريقتان للتخلص من المتغيرات الاصطناعية:

- ✓ طريقة (M) الكبيرة (Big–M)؛
- ✓ طريقة المرحلتين (Two–Phase).

II-1- طريقة (M) الكبيرة (Big–M):

المثال التالي يوضح أهم الفوارق في تطبيق الطريقة السمبليكس بأسلوب (M) الكبيرة على مشكلة التقليل، والذي يهدف إلى إيجاد أقل التكاليف عند إنتاج نوعين من السلع[2].

مثال رقم (03): تنتج مؤسسة لصناعة الإلكترونيات نوعين من المنتجات هما : A وB ، يتطلب إنتاج كل منتج المرور في مرحلتين، ويوجد لدى الشركة على الأقل (6) ساعات يومياً لأعمال المرحلة الأولى، ولا يقل عن (4) ساعات في اليوم الواحد مخصصة لأعمال المرحلة الثانية، والجدول التالي يبين الوقت الذي تحتاجه الوحدة الواحدة من كلا المنتجين، بالإضافة إلى تكلفة إنتاج كل منتج.

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 67 .

[2] - Gérald Baillargeon ,op-cit, P 157 .

المنتج	المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	التكلفة
A	1	1	3
B	3	1	4

المطلوب: نفترض أن الشركة ترغب في تخفيض تكاليفها الكلية، ما هي الكميات التي تنتجها من كل نوع.

الحل: يتم أولاً بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة، وعلى النحو الآتي:

X_1: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج A.

X_2: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج B.

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $x_1 + 3x_2 - S_1 + A_1 = 6$

القيد الثاني: $x_1 + x_2 - S_2 + A_2 = 4$

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، والمتغيرات الاصطناعية تضاف في حالة (Min) وبمعامل (M) وهو عدد كبير جداً، وتطرح في حالة (Max)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$$

ثانياً: تكوين جدول الحل الأساسي الأول وبنفس القواعد المشار إليها سابقا:

متغيرات الاصطناعية   متغيرات الفجوة   متغيرات القرار

T_1	C_J	3	4	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
M	A_1	1	3	-1	1	0	0	6	2
M	A_2	1	1	0	0	-1	1	4	4
Z_J		2M	4M	−M	M	−M	M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		3−2M	4−4M	M	0	M	0	Z=10M	

يلاحظ من جدول الحل الأولي أن المتغيرات الأساسية هي المتغيرات الإصطناعية، نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع ($\Delta Z \geq 0$)، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة سالبة في (ΔZ) وفي حالة وجود (M) الكبرى في معاملات فإننا نقارن بين معاملات (M) وفي حالة عدم وجود (M) الكبرى في المعاملات نقارن مقارنة عادية بين الأعداد وفي هذه الحالة المتغير (X_2) الذي قيمته في السطر الأخير المقابلة له تساوي (4−4M) وهي أعلى قيمة بإشارة سالبة في الصف (ΔZ) وبالتالي فإن (X_2) هو المتغير الداخل وعموده هو العمود الإرتكاز كما مبين في الجدول أعلاه.

ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$Min\left\{\frac{6}{3}=2, \frac{4}{1}=4\right\} = Min\,\{2,4\} = 2$$

ونختار أقل نسبة موجبة وهي (2) وبذلك فإن (A_1) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (3) هو العنصر الإرتكاز.

نقوم بإجراء التعديل الأول عن طريق تكوين جدول جديد نحصل بموجبه على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء الحسابات الآتية:

تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1 = \left(\frac{1}{3};\frac{3}{3};\frac{-1}{3};\frac{1}{3};\frac{0}{3};\frac{0}{3};\frac{6}{3}\right) = \left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right)$$

تكوين قيم الصف الثاني (A_2):

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$A_2 = (1;1;0;0;-1;1;4) - 1\left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right) = \left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3};\frac{-1}{3};-1;1;2\right)$$

يتم احتساب قيم صف (Z_J) كما يلتي:

$$Z_J = CB'X_J S_J A_J$$

$$Z_J = (4 \quad M)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{3}+\frac{2M}{3} \quad 4 \quad \frac{-4}{3}+\frac{M}{3} \quad \frac{4}{3}-\frac{M}{3} \quad -M \quad M\right)$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = (4 \quad M)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 + 2M$$

وبموجب الحسابات السابقة نحصل على الجدول التالي:

T_2	C_J	3	4	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X_1}$
4	X_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	2	6
M	A_2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	−1	1	2	3
Z_J		$\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$	4	$\frac{-4}{3}+\frac{M}{3}$	$\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$	−M	M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		$\frac{5}{3}-\frac{2M}{3}$	0	$\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$	$\frac{-4}{3}+\frac{4M}{3}$	M	0	Z=8+2M	

نختبر أمثلية الحل في جدول الثاني فنلاحظ وجود قيم سالبة، فنختار أعلى قيمة بإشارة سالبة، وتقع تحت المتغير (X_1)، ويكون المتغير الداخل (X_1)، وعموده هو عمود الإرتكاز ثم نحدد المتغيرة الخارج من الحل الأساسي كما مر سابقاً فيكون (A_2) وصفه هو صف الإرتكاز، ويكون الرقم ($\frac{2}{3}$) هو عنصر الإرتكاز، وبناء على هذا تتم عملية إعادة بناء الجدول الجديد ويكون على الشكل التالي:

T_3	C_J	3	4	0	M	0	M	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B
4	X_2	0	1	−0,5	0,5	0,5	−0,5	**1**
3	X_1	1	0	0,5	−0,5	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	**3**
Z_J		$\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$	4	−0,5	0,5	−2,5	2,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	**0,5**	**M−0,5**	**2,5**	**M−2,5**	**Z=13**

جدول الحل الأمثل لأن: $\Delta Z \geq 0$

نقوم بتقييم الحل من خلال (ΔZ)، حيث نلاحظ بأن جميع القيم أكبر من أو تساوي صفر وهذا يدل على أن الحل الحالي يمثل حل الأمثل، ويتلخص الحل الأمثل فيما يلي:

$$X_1 = 3; X_2 = 1; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 13$$

ملاحظة هامة:

- ✓ إذا خرجت متغيرة الإصطناعية من الأساس فيمكننا الاستغناء عن حساب عناصر عمود المتغيرة الإصطناعية التي خرجت لأنها لا يمكن أن تدخل إلى أساس مرة أخرى[1]؛
- ✓ تعطى الأولية الخروج من الأساس في حالة الانحلال (تعدد البدائل) لمتغيرة الإصطناعية.

II-2- طريقة المرحلتين (Two−Phase):

بعد أن لاحظنا تعقد العمليات الحسابية بعض الشيء في طريقة (M) الكبيرة وخاصة عندما تكون العمليات الحسابية يدوية، هناك طريقة أخرى أقل صعوبة مما في الطريقة السابقة وهي طريقة المرحلتين، يستعمل هذا الطريقة عندما تستعمل المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية بغية الحصول على الحل الممكن لهذه النماذج.

وتستخدم هذه الطريقة لإستبعاد أثر المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية والحصول على الحل الأمثل، وتكون هذه الطريقة على مرحلتين[2]:

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 85 .

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.

- **المرحلة الأولى: (Phase I)** وهنا تظهر دالة الهدف فقط بالمتغيرات الإصطناعية وبمعامل واحد وتستبعد المتغيرات الأخرى كافة من دالة الهدف (سواء أكانت متغيرات القرار أم متغيرات الفجوة)، هذا إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنئة، وتظهر المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف بمعاملات (-1) إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم، وكما يأتي:

$$Min\ (Z) = A_1 + A_2 + \dots\dots\dots\ \dots\dots + A_m$$
$$Max\ (Z) = -A_1 - A_2 - \dots\dots\dots\ \dots\dots - A_m$$

وتنتهي المرحلة الأولى في حالة (Min) أو (Max) عندما تساوي دالة الهدف صفر أي يوجد مرحلة ثانية (يوجد حل أمثل)، أما في حالة عدم المساواة دالة الهدف للصفر في نهاية المرحلة الأولى فلا يوجد حل أمثل ولا وجد مرحلة ثانية[1].

- **المرحلة الثانية: (Phase II)** وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة و وهنا تظهر دالة الهدف على حقيقتها، أي بمعاملات المتغيرات القرار كما هي في النموذج، وتظهر متغيرات الفجوة بمعاملات أصفار وكما هي الحالة الطبيعية و على النحو الآتي:

$$Min\ (Z) = CX_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots\ \dots\dots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \dots\dots\ 0S_m$$
$$Max\ (Z) = CX_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots\ \dots\dots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \dots\dots\ 0S_m$$

وهنا يكمل الحل بجداول السمبلكس وكما مر بنا إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل.

مثال رقم (04): حل نموذج البرمجة الخطية باستعمال طريقة المرحلتين

$$Min(z) = 2x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $3x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 3$

القيد الثاني: $4x_1 + 3x_2 - S_2 + A_2 = 6$

القيد الثالث: $x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$

المرحلة الأولى:

حل بدالة الهدف التالية: $Min(z) = A_1 + A_2$

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit, P 147 .

T_1	C_J	0	0	0	0	0	1	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_1}$
1	A_1	3	1	−1	0	0	1	0	3	1
1	A_2	4	3	0	−1	0	0	1	6	$\frac{3}{2}$
0	S_3	1	2	0	0	1	0	0	3	3
Z_J		7	4	−1	−1	0	1	1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		−7	−4	1	1	0	0	0	Z=9	

نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع $(\Delta Z \geq 0)$، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، المتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي:(X_1) والتي تخرج من الأساس هي: (A_1) وبإتباع نفس خطوات السمبليكس السابقة نقوم بإعداد الجدول الحل الأساسي الثاني:

T_2	C_J	0	0	0	0	0	1	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	X_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	3
1	A_2	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	−1	0	$\frac{-4}{3}$	1	2	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	2	$\frac{6}{5}$
Z_J		0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	−1	0	$\frac{-4}{3}$	1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$	0	Z=2	

نلاحظ من خلال الجدول وجود قيم سالبة أي مزال هناك فرص أخرى لتقليل من التكاليف، وأكبر قيمة سالبة هي للمتغير (X_2) وهي التي تدخل إلى الأساس، كما نلاحظ أيضا أن هناك متغيرتين مرشحتين للخروج وهما (S_3),(A_2) وهنا **تعطى أولوية الخروج للمتغيرة الإصطناعية** للتقريب الأكثر للحل، أي المتغيرة التي تخرج من الأساس هي (A_2) ومنه الجدول الحل الأساسي يكون كالآتي:

T_3	C_J	0	0	0	0	0	1	1	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B
0	X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
0	X_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{-4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	1	-1	0
Z_J		0	0	0	0	0	0	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	Z= 0

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ **و** $Z = 0$ **توجد مرحلة ثانية**

ننتقل إلى المرحلة الثانية، ويتم ذلك بحذف أعمدة معاملات المتغيرات الإصطناعية من جدول الحل الأخير من المرحلة الأولى.

المرحلة الثانية: وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة وبدالة الهدف الأصلية (متغيرات القرار، ومتغيرات الفجوة) أي حذف المتغيرات الإصطناعية، أما الجدول الأول من المرحلة الثانية يتشكل بعد بإفراغ البيانات الجدول السابق فيه واختبار الحل.

دالة الهدف تكتب بشكل التالي :

$$Min(z) = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون الجدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

T_1	C_J	2	1	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
2	X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
1	X_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	0
Z_J		2	1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$Z=\frac{12}{5}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	**0**	

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الأول من المرحلة الثانية هو جدول الحل الأمثل

وهنا تكون قيم الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1 = \frac{3}{5};\ X_2 = \frac{6}{5};\ S_1 = S_2 = S_3 = 0;\ Z = \frac{12}{5}$$

III- حالات ومشاكل خاصة عند الحل بطريقة السمبليكس:

إستعرضنا الحالات الخاصة للحل بالطريقة البيانية، سنعود لوصف هذه الحالات عند الحل بطريقة السمبليكس:

III-1- حالة عدم وجود حل ممكن:

تحدث عدم إمكانية الحل عندما لا نجد حلا مرضيا لجميع القيود، ويمكن الإشارة إلى عدم إمكانية الحل بمجرد النظر إلى جدول الحل النهائي، إذ نجد فيه أن جميع القيم صف (ΔZ) نشير إلى الوصول للحل الأمثل، لكن نجد أنه لا يزال هناك متغير اصطناعي في الجدول أدناه جدول الحل النهائي لمشكلة برمجة خطية من نوع التدنئة الجدول مثالا عن مشكلة برمجة خطية لم تتم صياغتها بشكل صحيح، ربما تتضمن هذه المشكلات قيوداً متضاربة، عدم وجد حل ممكن يكون ممكناً لبقاء المتغير الاصطناعي في مزيج الحل، رغم أن جميع القيم في الصف (ΔZ) موجبة أو معدومة (وهو المعيار المعتمد في الوصول للحل الأمثل في حالة التدنئة، والمثال التالي يبين هذه الحالة.[1]

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص: 184.