تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الأساسية والمهمة في بحوث العمليات وتكمن أهميتها في كونها وسيلة لدارسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، يقدم نموذج البرمجة الخطية طريقة كفؤءة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل، التي يخضع كل منها إلى مجموعة من المحددات والقيود، وبشكل يساهم بتحقيق أهداف الإدارة. وهي أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق الآتية: طريقة البيانية، الطريقة المبسطة، طريقة النقل، طريقة التعين والتخصيص ....الخ.

I- مفهوم البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المشاكل الإدارية والإقتصادية والعسكرية، وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التكنولوجي الذي ساعد على تطوير الحسابات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة. تم تطويرها وإستخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي جورج دانتزنغ (George Dantzing)، لحل بعض مشكلات التخطيط في السلاح الجو الأمريكي، في حين أن العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (Jean Baptise Fourier) قد تنبه لمساهماتها المحتملة في عام 1923. وقد كان أول استخدام أو تطبيق للبرمجة الخطية من قبل الإقتصادي جورج ستلجر (George Stigler) وذلك في بداية الأربعينات، حيث هدف إلى تحديد مكونات الغذاء اليومي (Diet) والتي ستزود الجسم بالحد الأدنى من احتياجاته من الفيتامينات والحديد والمواد الأخرى، وبأقل تكلفة ممكنة[1].

ويمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي يكون توزيعها مثاليا[2].

إن تعبير **البرمجة** يعني وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع ما لبلوغ وتحقيق هدف معين، أما تعبير **خطية** فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صياغة رياضية سهلة.

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف)[3]، ولا تنسى أن لكل مجموعة من المعادلات حلا، وعادة ما تكون للمعادلات

---

[1] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 25.

[2] . عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " **المدخل لبحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001، ص 21.

[3] - Gérald Baillargeon ,"**Programmation linéaire appliquée** ", les édition SMG ,Québec , Canada,1996 .p 05 .

الآنية حلول أي إيجاد قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائما نسعى إلى إيجاد الحل الأمثل وتكون الحلول على ثلاث أنواع[1]:

- **الحل:** وهو حل ممكن الوصول إليه في أية مجموعة من المعادلات.
- **الحل الممكن:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.
- **الحل الأمثل:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولا يمكن تحقيق الحل الأمثل إلا بعد أن يتحقق الحل الممكن.

II- متطلبات وفروض نموذج البرمجة الخطية:

II-1- متطلبات استخدام البرمجة الخطية:

تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية هي[2]:

- **تحديد الهدف:** أي ما تسعى لتحقيقه وهو إما زيادة الأرباح أو تقليل الكلفة، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها دالة الهدف وتصاغ دالة الهدف بالشكل التالي:

حالة تعظيم : $Max\ (Z) = 2x + 3y$

حالة تدنئة : $Min\ (Z) = 2x + 3y$

- **توفير عدد من البدائل:** تستخدم البرمجة الخطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة إذاً لا داعي لاستخدام البرمجة الخطية؛
- **محدودية الموارد:** نحتاج لاستخدام البرمجة الخطية عندما تكون الموارد محددة (نادرة) كالموارد البشرية، أو المواد، أو ساعات اشتغال الآلات.وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف، فإذا كان لدينا 300 ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين لإنتاج المنتوج الأول وثلاثة ساعات لإنتاج المنتوج الثاني فيعبر عن المشكلة كآلاتي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 300$$

---

1 . حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.

2 . محمد دباس الحميد، محمد العزاوي: " **الأساليب الكمية في العلوم الإدارية**"، دار اليازوري، الأردن، 2013. ص ص: 09-10.

- **وجود علاقة خطية:** الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد)، بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكليف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج، وكذلك الموارد تستنفذ بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج؛
- **القيود غير السالبة:** إن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية. ولذلك لا يمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq -300$$

II-2- فروض نموذج البرمجة الخطية:

تمثل الافتراضات، الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية، أو هي المتطلبات الفنية لمشكلة البرمجة الخطية وهي[1]:

- يفترض النموذج إمكانية النسبة و التناسب في كل مكوناته (دالة الهدف والقيود الفنية)؛
- تحقيق خاصية الجمع التي تعني أن القيمة الكلية لأي مؤشر ما هي إلا حاصل جمع قيمه الجزئية؛
- يعالج نموذج البرمجة الخطية الحالات المتصفة بالتأكد التام، وهذا يعني أن القيم التي تأخذها مؤشرات النموذج هي كلها قيم محددة ومعروفة ولا يطرأ عليها تغيير خلال فترة الدراسة.

وهناك فروض أخرى منها ما يلي[2]:

- **الخطية:** يشترط ان تكون العلاقة في دالة الهدف والقيود علاقة خطية؛
- **المحدودية:** محدودية الموارد والأنشطة، أي أن هناك ندرة فيها وأنه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة؛
- **عدم السلبية:** عدم إمكانية أن يكون حجم النشاط سالبا؛
- **الاستقلالية:** أن اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر، أي استقلالية عناصر الإنتاج؛

III- مجالات استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الإقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الإقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

---

[1]. مكيد علي: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة**"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015. ص 10.

[2]. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص ص: 08-09 .

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي مجالات العلوم الإقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة كما يلي[1]:

- **في حالة التعظيم:**
  - ✓ تعظيم الأرباح؛
  - ✓ تعظيم الإنتاج؛
  - ✓ تعظيم طاقات التخزين؛
  - ✓ تعظيم إستخدام رؤوس الأموال؛
  - ✓ تعظيم إستخدام اليد العاملة.

وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

- **في حالة التدنئة:**
  - ✓ تدنئة التكاليف؛
  - ✓ تدنئة الخسائر؛
  - ✓ تدنئة عدد الموظفين؛
  - ✓ تدنئة الأجور الإجمالية.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة وغير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت وما تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال منها[2]:

- **التطبيقات التسويقية:** مثل اختيار وسائط الإعلانات، وبحوث التسويق؛
- **التطبيقات المالية:** مثل التخطيط المالي، تحليل الأوراق والأسهم المالية، أو اختيار المحفظة الاستثمارية؛
- **تطبيقات إدارة الإنتاج:** مثل الإنتاج المختلط (المزيج الإنتاجي)، تخطيط الإنتاج، النقل والتخصيص، أو قرار الشراء أو الصنع.
- **مشاكل المزج؛**
- **مشاكل تخطيط المشروعات.**

وغيرها من التطبيقات التي كان للبرمجة الخطية فيها دوراً بارزاً في مساندة صانعي القرارات في منظمات الأعمال من أجل حل المشكلات التي يواجهونها في المنظمة.

---

[1] . راتول محمد: " **بحوث العمليات** "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006.

[2] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 27.

IV- صياغة أو بناء نموذج البرمجة الخطية:

إن صياغة مشكلة إدارية معينة بشكل مسألة برمجة خطية تقتضي كما أشرنا سابقا تطوير نموذج رياضي يمثل الحالة أو المشكلة الإدارية، وبهذا فإنه يجب فهم الموقف الإداري أو المشكلة فهما دقيقاً وهي الخطوة الأولى لحلها، إن صياغة نموذج البرمجة الخطية يمكن أن تجمل خطواته بالآتي:

- ✓ الفهم الكامل والدقيق للمشكلة الإدارية التي يواجهها المدير؛
- ✓ تشخيص دالة الهدف والقيود المحددة؛
- ✓ تحديد متغيرات القرار؛
- ✓ استخدام متغيرات القرار في كتابة العبرات الرياضية لكل من دالة الهدف والقيود.

IV-1- صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

من اجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توفر ثلاث مجموعات من العناصر الأساسية وهي:

- **تحديد الهدف بصورة كمية:**

ويعبر عنه بدالة الهدف وهي عبارة عند الدالة المطلوب تعظيمها أو تدنيتها وهي عادة ما تكون في صورة نقدية أو طبيعية ويتوقف ذلك على طبيعة المشكلة المطلوبة تحليلها ويجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كمياً كأن يكون الهدف تحقيق اكبر ما يمكن من الربح أو تأمين اصغر ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد؛

- **تحديد القيود:**

يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة، كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو معادلات، أو خليط منها وتسمى يالقيود الهيكلية؛

- **شرط عدم السلبية:**

إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

ويمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالآتي[1]:

$$Max\_or\_Min(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$Subject\_to$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\le, =, \ge) b_i \qquad (i = 1,2,\dots\dots\dots,m)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,\dots\dots\dots,n)$$

إذ أن: a_{ij}, b_i, c_j ثوابت تحدد من سياق المشكلة؛

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 20.

Z : تمثل دالة الهدف؛

X_j: المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بحقها؛

b_i: تمثل الموارد المحددة؛

a_{ij}: كمية الموارد المحددة من النوع i واللازم تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

C_j: تمثل الربح أو الكلفة نتيجة تخصيص المورد i لإنتاج وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

IV-2- تركيب نموذج البرمجة الخطية:

وتعد مرحلة تركيب النموذج من أهم مراحل البرمجة الخطية إذ تعد مرحلة عملية أكثر منها فنية وتعتمد على خبرة الباحث ومقدرته على صياغة المشاكل بشكل نموذج برمجة خطية، ولتوضيح هذه المرحلة سنورد المثال الآتي:

مثال رقم (01): تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع، نوع A ونوع B، تصنع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فإذا كان تصنيع السلعة A يحتاج إلى ساعتين عمل في القسم الأول وساعة عمل في القسم الثاني وأربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاج تصنيع السلعة B إلى ساعتين عمل في كل قسم كما أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 160 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثاني 120 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثالث 280 ساعة عمل أسبوعيا وإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 2 دينار ومن السلعة B هو 3 دينار.

المطلوب: نموذج برمجة خطية لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

الحل: لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول (هذه الخطوة في التمارين الأولى لتعلم الحل بسهولة).

السلعة	الوقت اللازم للتصنيع			ربح الوحدة بالدينار
	القسم الأول	القسم الثاني	القسم الثالث	
A	2	1	4	**2**
B	2	2	2	**3**
ساعات العمل المتاحة	**160**	**120**	**280**	

تكوين النموذج:

- ✓ تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية، ولذلك:

  نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو X_1.

  نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو X_2.

- ✓ تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات أو خليط منها:

والقيود هنا هي أن الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب أن نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ أن الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A و السلعة B.

بالنسبة للقسم الأول: الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة A)+ (عدد الوحدات المنتجة من السلعةB)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B)، ويجب أن لا يتجاوز عدد الساعات العمل المتاحة في القسم الأول وكما في المتراجحة الآتية:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للقسمين الثاني والثالث أيضا وكما في المتراجحات الآتية:

بالنسبة للقسم الثاني:

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$

بالنسبة للقسم الثالث:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 280$$

ولأن عدد الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالبا، وعلى النحو الآتي:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ تحديد دالة الهدف:

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

وتهدف إلى انتاج الكميات المثلى من x_1, x_2 التي تجعل دالة الهدف Z اكبر ما يمكن Maximize ودائما تختصر بـ Max

البرنامج الخطي:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

مثال رقم (02): تنتج إحدى الشركات ثلاث أنواع من عصير الفواكه في مصنعيين A و B وإن كميات الإنتاج في اليوم تقدر كالآتي:

نوع العصير	المنتج A (لتر)	المنتج B (لتر)
1	1500	1500
2	3000	1000
3	2000	5000

وقد أظهرت دراسة للسوق أن من المتوقع أن يكون هناك طلب في شهر جويلية يقدر بـ 20000 لتر من النوع الأول و 40000 من النوع الثاني و 44000 من النوع الثالث، وكذلك فإن كلفة تشغيل المصنع A هي 600 وحدة نقدية في اليوم و400 وحدة نقدية للمصنع B.

المطلوب: تحديد عدد الأيام التي يشتغلها كلا من المصنعين للوفاء بطلب السوق المتوقع في شهر جويلية مع تدنية التكاليف إلى أدنى حد ممكن (صياغة المسألة)، وكتابة البرنامج الخطي بالشكل المصفوفي.

الحل:

القرار هو تحديد عدد الأيام التي يشتغلها كل من المصنعين في شهر جويلية.

نفترض أن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع X_1=A

نفترض أن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع X_2=B

ومنه البرنامج الخطي هو :

$$Min(z) = 600x_1 + 400x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 1500x_1 + 1500x_2 \leq 20000 \\ 3000x_1 + 1000x_2 \leq 40000 \\ 2000x_1 + 5000x_2 \leq 44000 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

أما الشكل المصفوفي يكتب كما يلي:

$$Min(z)=(600 \quad 400)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1500 & 1500 \\ 3000 & 1000 \\ 2000 & 5000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 20000 \\ 40000 \\ 44000 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3-IV– تمارين محلولة:

التمرين الأول: تتعهد إحدى الشركات بتقديم 100 كغم من مادة غذائية تتكون من مزيج ثلاث مواد: A، C،B بشرط أن يحتوي هذا المزيج على:

- ✓ %0,08 على الأقل وليس أكثر من %1,2 من الكالسيوم.
- ✓ %22 بروتين على الأقل.
- ✓ %50 ألياف في أكثر الحدود.

فإذا كانت محتويات المواد الثلاثة من العناصر الغذائية وكلفة كل منها كالأتي:

المواد	الكمية الموجودة في كل كغم			الكلفة/كغم
	كالسيوم	بروتين	ألياف	
A	0,380	–	–	0,0164
B	0,001	0,09	0,02	0,0463
C	0,002	0,50	0,08	0,1250

المطلوب: صياغة الحالة في شكل برمجة خطية بحيث يتم تلبية المتطلبات الغذائية وتدنية الكلفة إلى أدنى حد ممكن.

حل التمرين الأول: القرار هنا هو تحديد المزيج الأمثل من المواد الثلاث.

نفترض أن كمية X_1= A ، وكمية B = X_2، وكمية C =X_2 .

ومنه البرنامج الخطي للمسألة كالتالي:

$$Min(z) = 0{,}0164x_1 + 0{,}0463x_2 + 0{,}1250x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 0{,}380x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \leq 0{,}012 \\ 0{,}380x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \geq 0{,}008 \\ 0{,}09x_2 + 0{,}50x_3 \geq 0{,}22 \\ 0{,}02x_2 + 0{,}08x_3 \leq 0{,}50 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

التمرين الثاني: ترغب إحدى شركات الطباعة في شراء نوعين من المطابع هما A و نوع B ، والنوع A يشغل مساحة مقدارها 40 متر مربع وتبلغ كلفة الوحدة الواحدة 2000 دينار وتحتاج إلى ثلاثة عمال يعملون لمدة 8 ساعات، أما النوع B فيشغل مساحة مقدارها 60 متر مربع وتبلغ كلفة الوحدة 6000 دينار وتحتاج إلى 4 عمال يعملون لمدة 8 ساعات . فإذا كانت المساحة المتاحة لدى الشركة هي 720 متر مربع والميزانية المخصصة لشراء المطابع هي 60000 دينار، علما بأن لدى الشركة 48 عاملا، ويمكن للمطبعة A أن تعمل بمعدل 100 ورقة في الدقيقة والمطبعة B يمكنها أن تعمل بمعدل 300 ورقة في الدقيقة.

المطلوب : كون نموذج برمجة خطية لتحديد العدد اللازم شراؤه من النوعين من المطابع A و B لكي تتمكن الشركة من تحقيق أكبر إنتاج.

حل التمرين الثاني:

X_1 = عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع A.

X_2 = عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع B .

ومنه البرنامج الخطي يكون كالآتي:

$$Max(z) = 48000x_1 + 144000x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 40x_1 + 60x_2 \leq 720 \\ 2000x_1 + 6000x_2 \leq 60000 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 48 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

التمرين الثالث: يتم فحص المنتجات الصناعية في إحدى المنشأة من قبل نوعين من المفتشين A و B (التصنيف على أساس الكفاءة في الفحص)، يتوقع أن يتم فحص ما لا يقل عن 1500 وحدة من المنتج يومياً (8 ساعات عمل/ يوم). فإذا علمت بأن المفتش A يستطيع فحص 20 قطعة في الساعة وبدقة 96% في حين أن المفتش B يستطيع فحص 14 قطعة وبدقة 92%، إن الأجور المدفوعة لكلا النوعين من المفتشين هي 5 وحدات نقدية في الساعة للمفتش A و 4 للمفتش B كذلك فإن عدد المفتشين الموجودين في المؤسسة هو 10 من النوع A و15 من النوع B.

المطلوب: تخصيص العدد الأمثل من المفتشين لإنجاز هدف المهمة وذلك بصياغة المسألة في شكل برمجة خطية.

حل التمرين الثالث: إن القرار هنا هو تحديد العدد الأمثل من المفتشين من كلا النوعين A وB .

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع X_1=A

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع X_2=B

إن الهدف سيكون تقليل الكلفة الكلية للمفتشين، علما بأن الكلفة المرتبطة بكل نوع منهم ستكون كالآتي:

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع A هي : $5 + (3 * 0,04 * 20) = 7,40$ وحدة نقدية .

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع B هي : $4 + (3 * 0,08 * 14) = 7,36$ وحدة نقدية.

دالة الهدف : $8(7,40X_1+7,36X_2) = 59,20X_1+58,88X_2$

القيد الثالث: $20*8X_1 + 14*8X_2 \geq 1500$

ومنه البرنامج الخطي يكون كالتالي:

$$Min(z) = 59,20x_1 + 58,88x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 15 \\ 160x_1 + 112x_2 \geq 1500 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

IV-4- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: مؤسسة إقتصادية بها 3 ورشات لإنتاج 3 أنواع من المنتوجات هي: خزائن حديدية، مكاتب إدارية، كراسي. بحيث أن كل منتوج يمر عبر الثلاث ورشات على النحو التالي:

الورشة رقم01: تجري بها عملية صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى بها هي: 32 ساعة عمل يوميا، (أي 4 عمال كل عامل يشتغل 8 ساعات يوميا).

الورشة رقم 02: تجري بها عملية تركيب الملحقات، طاقة العمل القصوى بها هي: 24 ساعة عمل يوميا.
الورشة رقم 03: تجري بها عملية الإنهاء (طلاء ، تزيين ، تغليف)، طاقة العمل القصوى بها هي: 16 ساعة عمل يوميا.

هذه المؤسسة تسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن، ولأجل ذلك بينت لها الدراسة التقنية التي قامت بها أن الوحدة الواحدة من المنتوج الأول تتطلب 4 ساعات عمل في (الورشة رقم01) و 2 ساعة عمل في (الور02) و 2 ساعة عمل في (الور03)، بينما الوحدة الواحدة من المنتوج 2 تتطلب 4 ساعات عمل في (الور01) و 4 ساعات عمل في (الور02) و 2 ساعة عمل في (الور03)، وأخيرا الوحدة الواحدة من المنتوج 3 تتطلب 5 ساعات عمل في (الور01) و 3 ساعات عمل (الور02) و 1 ساعة عمل في (الور03) .كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل منتوج هو: المنتوج الأول: 200 دج، المنتوج الثاني: 150 دج، المنتوج الثالث: 120 دج.

المطلوب: أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة والتي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة مع شكل المصفوفي.

التمرين الثاني: يمكن لشركة استخدام ثلاث عمليات إنتاجية (أ)، (ب)، (ج) في مصنعها لإنتاج أحد المنتوجات، للحصول على كل وحدة من المنتوج تحتاج العملية (أ) إلى 2 ساعة عمالة و 1 ساعة آلات، بينما تحتاج العملية (ب) إلى 1,5 ساعة عمالة و 1,5 ساعة آلات ، أما العملية (ج) فتحتاج إلى 1,1 ساعة عمالة و 2,2 ساعة آلات. ويجب على الشركة دفع 300 وحدة نقدية لكل ساعة عمالة و 200 ون لكل ساعة آلات لكنها لا تستطيع استخدام أكثر من 1200 ساعة آلات شهريا حيث أن ذلك هو أكبر قدر متاح في مدى القصير. إذا رغبت الشركة في إنتاج 1000 وحدة شهريا. فما هو البرنامج الخطي الذي يسمح بتحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها باستخدام العملية (أ)،(ب)،(ج)؟

التمرين الثالث: تصنع مؤسسة نوعين من المعاطف، معاطف للرجال معاطف للنساء، سعر بيع كل معطف رجالي 7500 دج و 8200 دج لكل معطف نسائي. وحسب متطلبات السوق لا يجب أن يتعدى إنتاج النوعين 6000 وحدة و 3000 وحدة على التوالي أسبوعيا. يتوافر لدى المؤسسة 50 عامل ويشتغل كل عامل 10 ساعات يوميا و5 أيام أسبوعيا. مدة صنع معطف النساء ضعف مدة صنع معطف الرجال وإذا أرادت المؤسسة صنع المعاطف الرجالية فقط فيمكن أن تصنع 1600 معطف في اليوم.

المطلوب: ما هو البرنامج الخطي الذي يسمح بمعرفة عدد المعاطف الواجبة الصنع في الأسبوع من كل نوع.

التمرين الرابع: السيد: " س " يعمل كمسير في مستشفى و يجب عليه توفير المكونات الغذائية الأساسية لغذاء مرضى قسم الجراحة العامة، الطبيب المكلف بالقسم أعطى له التوصيات التالية للمكونات التي يجب أن تحتوي عليها وجبة المريض وهي:

- على الأقل 50 وحدة من البروتين.
- على الأقل 15 وحدة من الفيتامينات.
- على الأقل 1200 حريرة.
- على الأكثر 100 وحدة من الدسم.

السيد: " س " لجأ إلى المختصين في التغذية للمستشفى، والذين أعطوا له الكميات التي جرت العادة شراءها من الأغذية وهي في الجدول التالي:

وسعر الأغذية في السوق كان ما يلي: حوت 45 دج للكلغ، دجاج 18 دج للكلغ، جبن 35 دج للكلغ، جزر 6 دج للكلغ ، بطاطا 5 دج للكلغ ، عجائن 8 دج للكلغ .

المحتويات / الغذاء	حوت (100غ)	دجاج (100غ)	جبن (100غ)	جزر (كلغ)	عجائن (كلغ)	بطاطا (كلغ)
البروتين	40	50	30	20	22	15
الفيتامين	25	10	20	30	15	25
الدسم	10	20	30	50	100	80
الحريرات	300	500	600	1400	2000	1800

المطلوب: إعداد البرنامج الذي يسمح بتحديد مكونات الوجبة بأقل سعر مع الحفاظ على صحة المريض.

V- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل البياني:

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، ولكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصوراً عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرتين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة (X_1,X_2)[1].

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

V-1- خطوات إيجاد الحل الأمثل:

وتتكون عملية الحل بطريقة الحل البياني من عدد من الخطوات التي لابد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي:

- ✓ تحويل كل متراجحات القيود إلى معادلات، وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم؛
- ✓ تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد، وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أصغر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، نشطب المناطق التي لاتحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة يجب أن تكون محدودة من اليمن وباتجاه نقطة الأصل وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد رؤوس المضلع الأبعد عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أكبر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التدنئة، نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يسار المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة تكون خارج المضلع بدلاً من أن تقع داخله أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محددة من اليمين ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود في المشكلة خليط من ($\geq$ ، $\leq$) معاً، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعيها التعظيم والتدنئة، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع؛

---

[1] . سهيلة عبد الله سعيد: " **الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**"، دار الحامد، ط1، الأردن، 2007. ص 38.

- ✓ إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط المضلع بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيم X_1 و X_2 عند كل نقطة؛
- ✓ نجد قيمة (Z) التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط المضلع عن طريق تعويض إحداثيات النقطة رؤوس المضلع في دالة الهدف؛
- ✓ نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي قيمة (z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف التعظيم (Maximization)، أو النقطة التي قيم (z) عندها أقل ما يمكن في حالة كانت دالة الهدف تخفيض (Minimization).
- ✓ ويمكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة مباشرة عندما يكون منطقة الحل عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس، وذلك بجعل دالة الهدف معدومة معدومة، أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم (Δ)، نحرك المستقيم (Δ) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الإقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Δ) عند سحبه إلى الأعلى بشكل موازي لأصله، وهي نقطة حاصلة من التقاطع عدة مستقيمات مولدة وعكس في حالة التدنئة[1].

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على نموذج البرمجة الخطية:

مثال رقم (01): أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن للبرنامج التالي بإستخدام الطريقة البيانية:

$$Max(z) = 4x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

الحل: لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

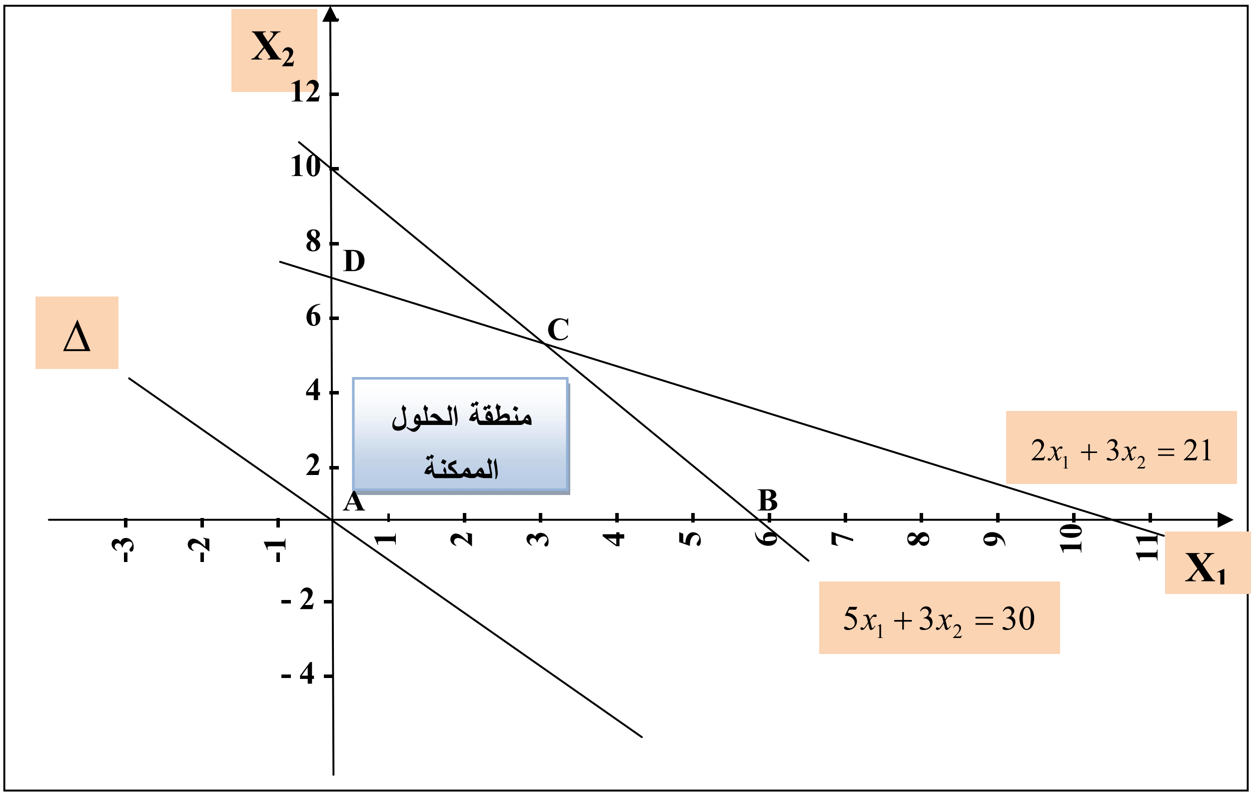
[1] . محمد راتول، مرجع سابق، ص 26.

$5x_1+3x_2=30$	
x_1	x_2
0	10
6	0

$2x_1+3x_2=21$	
x_1	x_2
0	7
10,5	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$4x_1+3x_2=0$	
x_1	x_2
3	-4
$-2,25$	3



بعد هذا تحدد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد، وهي كما مبين في الشكل المقابل (A,B,C,D).

أي نقطة توجد إلى يمين المستقيمين لا تحقق القيود، كما أن قيد عدم السلبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي على يسار المحور العمودي مرفوضة وبالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود آنيا وتشمل جميع النقاط الموجودة داخل

المنطقة (A,B,C,D) أي المنطقة غير المشطبة وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.

عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (C) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و(2)، إذ نجد قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة X_1 وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي من النقطة (Δ) فنجد قيمة X_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، وإما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتي المستقيمين حلا مشتركا كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30........(1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 21........(2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

$$3x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_2 = 5$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $C:(x_1 = 3, x_2 = 5)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $5\times3+3\times5=30$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2\times3+3\times5=21$

ومنه لا توجد طاقة غير مستعملة ، ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z_C = 4x_1 + 3x_2 = 4\times3+3\times5 = 27$$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية، ولا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة وتحقق في نفس الوقت جميع القيود، والجدول يوضح ذلك:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A:(x_1 = 0, x_2 = 0)$	$Z_A = 0$
B	$B:(x_1 = 6, x_2 = 0)$	$Z_B = 24$
C	$C:(x_1 = 3, x_2 = 5)$	$Z_C = 27$
D	$D:(x_1 = 0, x_2 = 7)$	$Z_D = 21$

ملاحظة: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحل الممكن.

مثال رقم (02): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min(z) = 0{,}75x_1 + 0{,}85x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 100 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 70 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 90 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$

$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

$$2x_1 + 8x_2 = 90$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

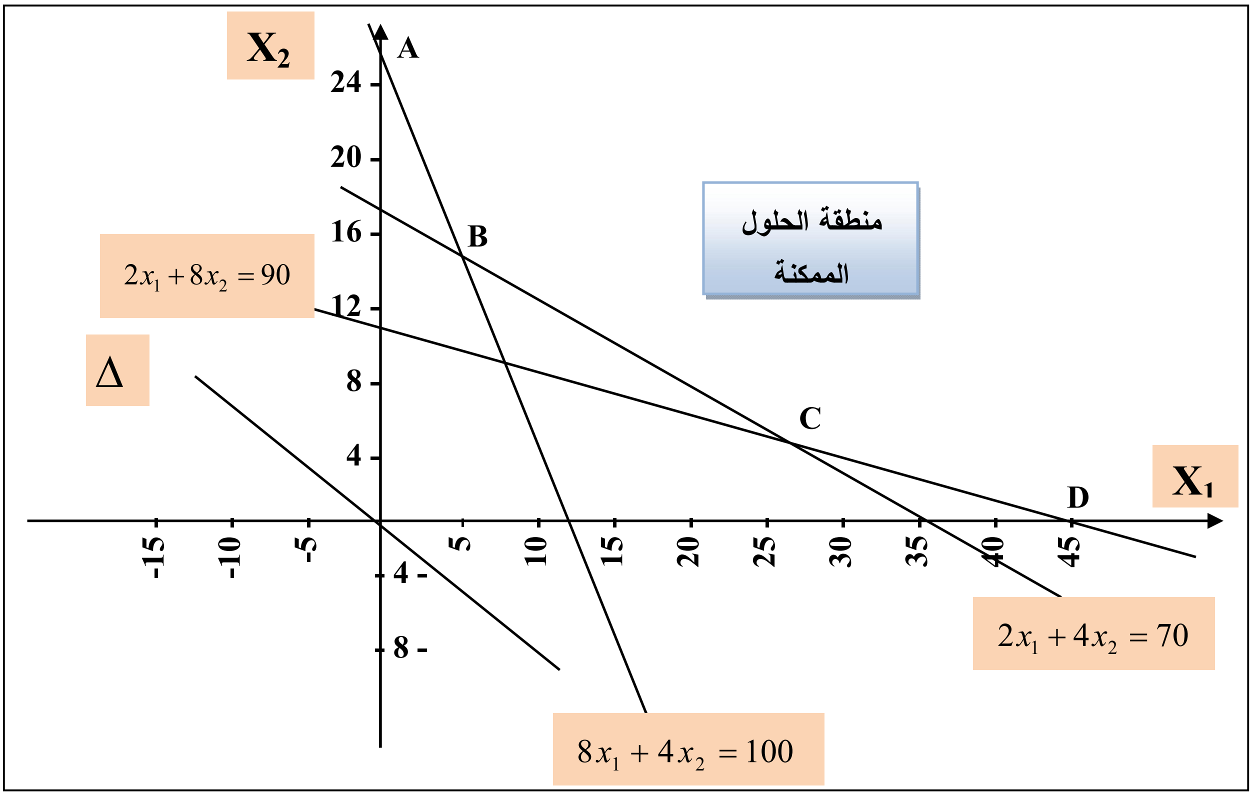
$2x_1 + 8x_2 = 90$	
x_1	x_2
0	11,25
45	0

$2x_1 + 4x_2 = 70$	
x_1	x_2
0	17,5
35	0

$8x_1 + 4x_2 = 100$	
x_1	x_2
0	25
12,5	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$0{,}75x_1 + 0{,}85x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	$-2{,}64$
$-3{,}4$	3



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل وذلك لأن المتراجحات في هذه المشكلة من النوع أكبر أو يساوي وبالتالي فإن الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة والتي يمكن تحديدها بالنقاط (ABCD).

حيث إحداثيات النقطة A هي: (25; 0) والنقطة D هي: (45;0)

أما النقاط B و C فلا يمكن تحديد إحداثياتهم مباشرة من الرسم الأمر الذي يتطلب استخراجهم من خلال حل المعادلات كما يلي:

النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الثاني والثالث:

$$2x_1+4x_2=70$$
$$2x_1+8x_2=90$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $C:(x_1=25, x_2=5)$

النقطة B متولدة من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$
$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الأربعة (A,B,C,D) في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي سيتحقق عند النقطة (B) لأنها أقل تكاليف كما يظهر في الجدول التالي:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A:(x_1 = 0, x_2 = 25)$	$Z_A = 21{,}25$
B	$B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$	$Z_B = 16{,}50$
C	$C:(x_1 = 25, x_2 = 5)$	$Z_C = 23$
D	$D:(x_1 = 45, x_2 = 0)$	$Z_D = 33{,}75$

ولتأكيد النتيجة عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن النقطة الأولى التي يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (B) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة.

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $8 \times 5 + 4 \times 15 = 100$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2 \times 5 + 4 \times 15 = 70$

القيد الأول: قيد محقق $2 \times 5 + 8 \times 15 = 130 \succ 90$

القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على مايلي:

$$Z_B = 0{,}75x_1 + 0{,}85x_2 = 0{,}75 \times 5 + 0{,}85 \times 15 = 16{,}50$$

V-2- حالات خاصة في الحل البياني:

أن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات هي:

- **تعدد الحلول المثلى:**

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع التعظيم أو تكون أقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع تدنئة.

مثال رقم (03): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

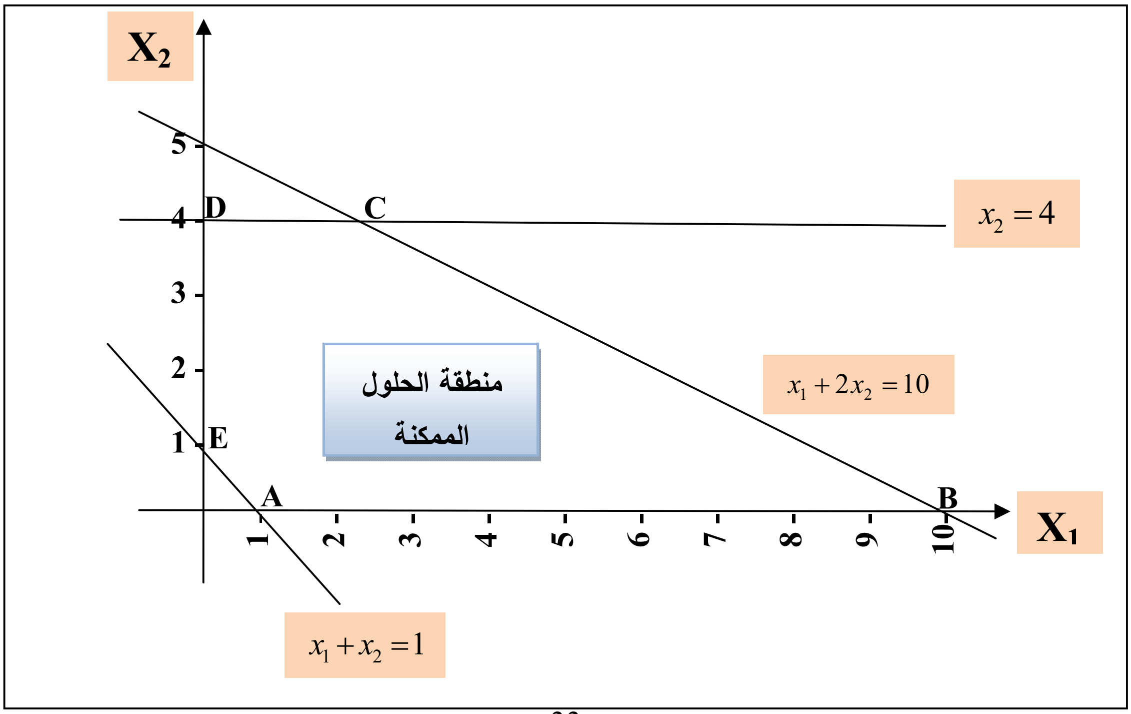
$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_2 = 4$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

$x_2 = 4$ هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي .

$x_1 + x_2 = 1$	
x_1	x_2
0	1
1	0

$x_1 + 2x_2 = 10$	
x_1	x_2
0	5
10	0



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالنقاط (ABCDE)، حيث إحداثيات النقطة A هي: (0; 1) والنقطة B هي: (0; 10) أما النقطة D هي: (4; 0) و E هي: (1; 0).

أما النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:

$$C : (x_1 = 2, x_2 = 4)$$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الخمس في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي يحقق لنا أكبر عائد كما يظهر في الجدول التالي:

قيمة دالة الهدف	أحداثي نقاط	نقاط
$Z_A = 1$	$A : (x_1 = 1, x_2 = 0)$	A
$Z_B = 10$	$B : (x_1 = 10, x_2 = 0)$	**B**
$Z_C = 10$	$C : (x_1 = 2, x_2 = 4)$	**C**
$Z_D = 8$	$D : (x_1 = 0, x_2 = 4)$	D
$Z_E = 2$	$E : (x_1 = 0, x_2 = 1)$	E

من الجدول نجد أن النقطتين C و B تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 10، يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك الرسم ينطبق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة وهنا يقال أن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

- **عدم وجود حلول:**

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولا يوجد هنا حل أساسي ابتدائي مقبول، أي قيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة ، بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية[1] وكما يلي:

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit , P 55 .

مثال رقم (04): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min(z) = 20x_1 + 15x_2$$

$$s/c$$

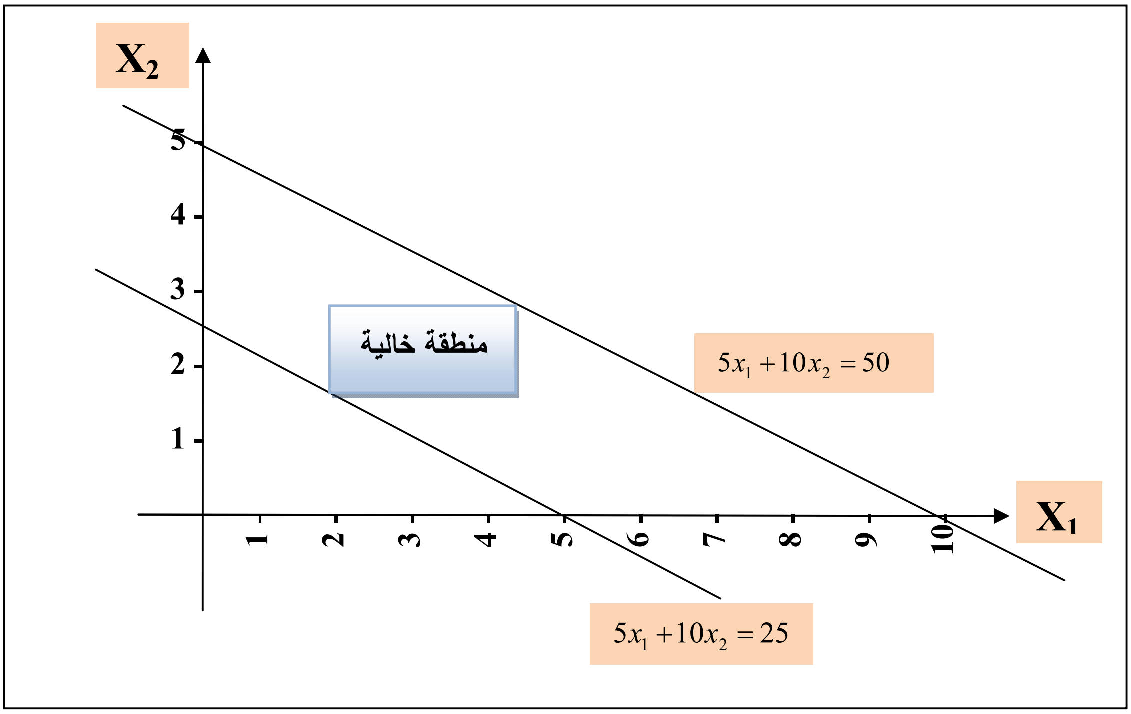
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \le 25 \\ 5x_1 + 10x_2 \ge 50 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

$5x_1 + 10x_2 = 50$	
x_1	x_2
0	5
10	0

$5x_1 + 10x_2 = 25$	
x_1	x_2
0	2,5
5	0



من خلال الشكل نلاحظ أن القيدين متعاكسان ولا يتقاطعان نهائياً، وبذلك لا نستطيع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

- **منطقة الحل الممكن غير محدودة:**

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من القيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة لطريقة الرسم البياني فإن هذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم[1].

ويمكن اعتبار هذه الحالة تقع أيضا عندما تكون المشكلة بدالة هدف تعظيم ويكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود فتكون هذه الأخيرة أكبر أو تساوي وتعكس الشكل القانوني(القيود أقل أو تساوي).

مثال رقم (05): افترض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية:

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

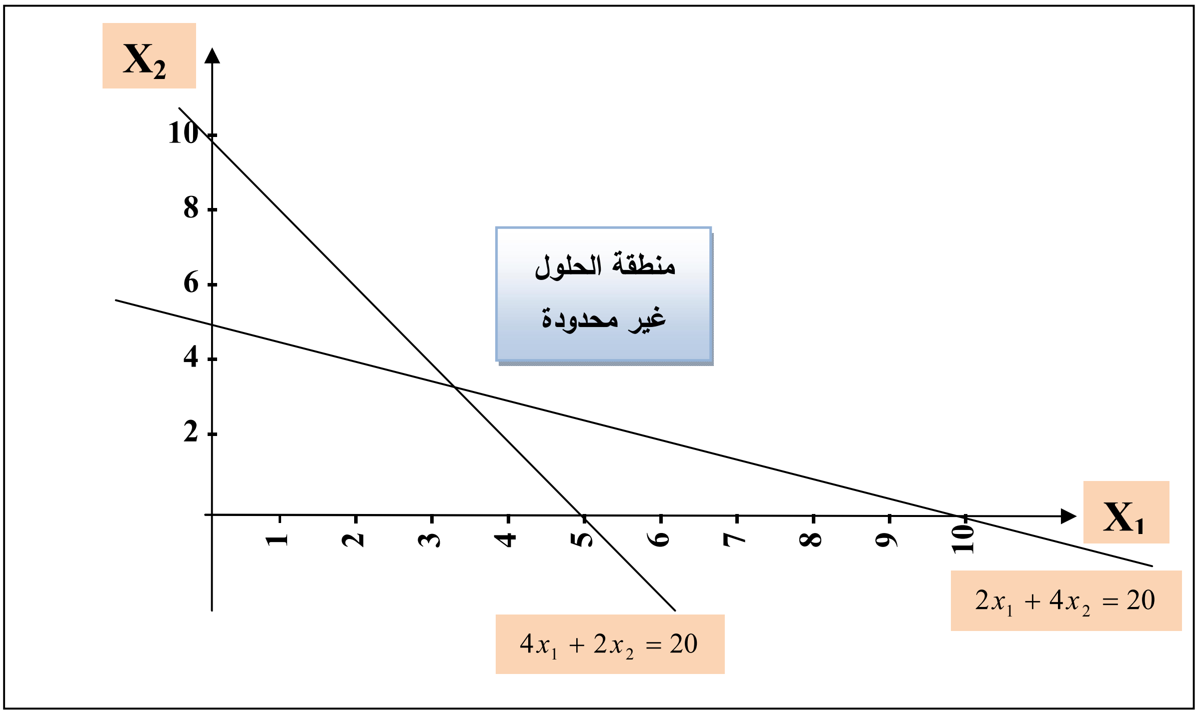
$$Max(z) = 3x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



إن منطقة الحل الممكن مفتوحة من النهاية وهي غير محدودة، فأية قيمة في المنطقة تحقق دالة الهدف وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهائية.

---

[1] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 52.

- **حالة حياد أحد القيود:**

وهي من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها قيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية.

مثال رقم (06): افترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

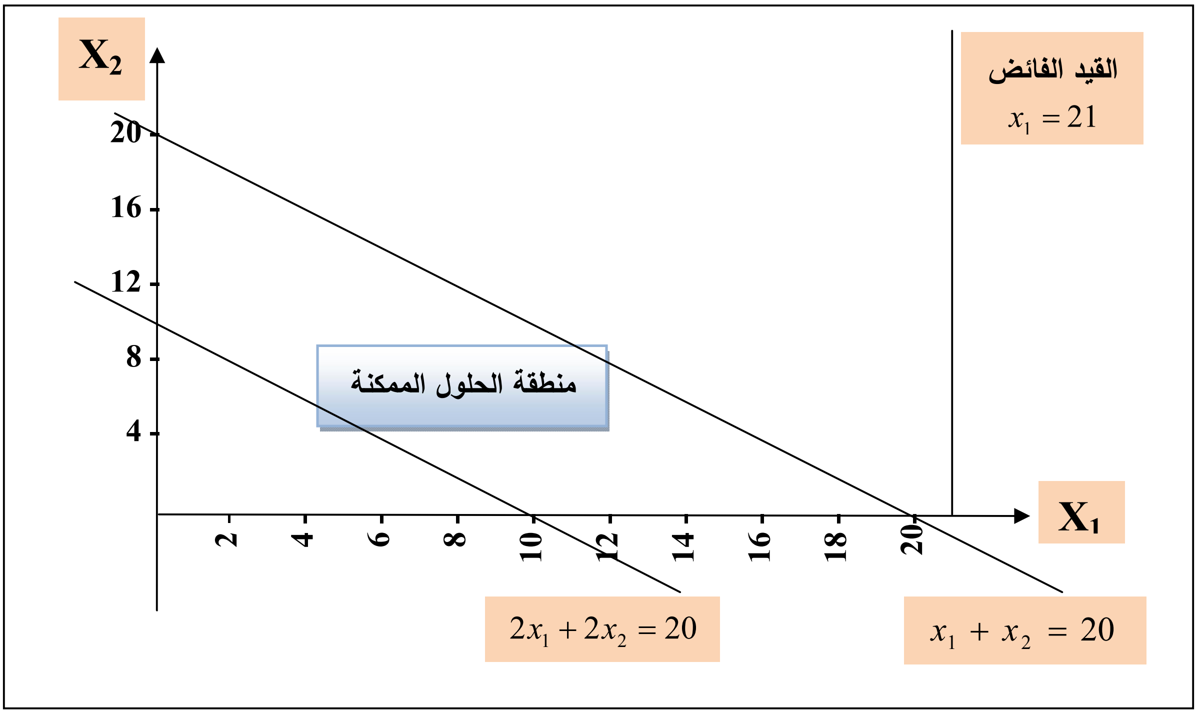
$$Max(z) = 5x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 20 \\ x_1 \le 21 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



نلاحظ من خلال الشكل وجود حالة القيد الفائض متمثلة بالقيد الثالث أبطلا مفعول هذا القيد ذلك أنهما أكثر تقييداً وتحديداً وهما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

V-3- تمارين مقترحة: باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لبرامج الخطية التالية

$1.Max(z)=15x_1+12x_2$ s/c $\begin{cases}3x_1+6x_2\leq 54\\6x_1+3x_2\leq 48\\9x_1+9x_2\leq 90\end{cases}$ $x_1\geq 0; x_2\geq 0$	$2.Min(z)=80x_1+60x_2$ s/c $\begin{cases}18x_1+12x_2\geq 180\\6x_1+9x_2\leq 162\\5x_1+10x_2\geq 110\end{cases}$ $x_1\geq 0; x_2\geq 0$
$3.Max(z)=2x_1+4x_2$ s/c $\begin{cases}x_1\geq 7\\x_2\leq 11\end{cases}$ $x_1\geq 0; x_2\geq 0$	$4.Max(z)=3x_1+6x_2$ s/c $\begin{cases}x_1+x_2\geq 12\\3x_1+4x_2\leq 24\end{cases}$ $x_1\geq 0; x_2\geq 0$
$5.Max(z)=9x_1+2x_2$ s/c $\begin{cases}x_1+x_2\leq 10\\2x_1+x_2\leq 12\\x_1\leq 14\end{cases}$ $x_1\geq 0; x_2\geq 0$	$6.Max(z)=x_1+2x_2$ s/c $\begin{cases}1{,}5x_1+3x_2\leq 15\\x_1\leq 7\\x_2\leq 3\end{cases}$ $x_1\geq 0; x_2\geq 0$