جامعة المستقبل
AL MUSTAQBAL UNIVERSITY

كلية العلـــــوم
قــســـــــــــم الكيمياء الحياتية

The Determinant of Matrix

المادة : الرياضيات
المرحلة : الاولى
اسم الاستاذ: م.م. ريام ثائر احمد

The Determinant of Matrix

Definition : **(Determinant of Matrix)** **محدد المصفوفه**

For every matrix A , there exist a function between the matrix A and the value of scalar number , this function is called the determinant of matrix A and is denoted by det(A) or |A| .

ملاحظه : المحدد يستخرج فقط للمصفوفه المربعه .

Method of Find Determinant : **(طرق أيجاد المحدد)**

أن عملية ايجاد محدد المصفوفه تختلف بأختلاف سعة المصفوفه وكما هو مبين أدناه :

(1) أذا كانت المصفوفه ذات سعه 1×1 اي ان المصفوفه تحتوي على عنصر واحد فقط . فأن محددها هو العنصر a_{11} نفسه كما في القانون ادناه :

If $A=[a_{11}]_{1\times1}$ **, then**

$\Rightarrow$ $|A| = |\ a_{11}\ | = a_{11}$.

Example: **Let A=[10] , find |A| ?**

Solution : $\Rightarrow$ **|A|=|10| =10 .**

(2) اذا كانت المصفوفه ذات سعه 2×2 **فأن محددها هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي**

مطروح من حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي كما في القانون ادناه :

If $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$ **, then**

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21}) .$$

Example(1) : Let A= $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, find |A| ?

Solution :

$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -8 \cdot (0) - (5 \cdot (7)) = \mathbf{0} - 35 = -35$.

Example(2) : Let A= $\begin{bmatrix} -2/7 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, find |A| ?

Solution :

$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2/7 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \left(\frac{-2}{7} \cdot (6)\right) - (-3 \cdot (2)) = \frac{-12}{7} - (-6) = \frac{30}{7}$

(3) أذا كانت المصفوفه A ذات سعه 3×3 لأيجاد المحدد لها يتم بالطريقه التاليه

If A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

(i) نضيف العمود الاول والثاني الى المصفوفه الاصليه فتصبح المصفوفه بالشكل التالي

$|A| = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right|$

(ii) نصل بخطوط وهميه على أقطار المصفوفه الجديده وكما يلي

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

(iii)وكما هو واضح في خطوه (ii) تم تحديد الخطوط الثلاثه الاولى بأشاره موجبه والثلاثه الاخيره بأشاره سالبه .

(iv) والان لأيجاد محدد المصفوفه A نقوم بأتباع الاسهم المؤشره وكما يلي :
(نقوم بحاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي + حاصل ضرب عناصر القطر الاول الموازي له + حاصل ضرب عناصر القطر الثاني الموازي له – حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي – حاصل ضرب عناصر القطر الاول الموازي للقطر الثانوي – الثانوي) . حاصل ضرب عناصر القطر الثاني الموازي للقطر
أي بالشكل التالي

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \;.$$

Example (1): Let $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, find $|A|$.

Solution :

$$|A| = \begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \;\; - \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ **$|A|$ = (1) (2) (0) + (0) (–1) (0)+ (3) (1) (–4) – (3) (2) (0) – (1) (–1) (–4) – (0) (1) (0)**

$\Rightarrow$ **$|A|$ = 0+0+(–12) – 0– 4 –0**

$\Rightarrow$ **$|A|$ = –16**

Example(2) : **Let** $A=\begin{bmatrix} 1/4 & -1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ **, find det(A)** .

Solution :

$$|A| = \begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \;\; - \\ 1/4 & -1/6 & 1/2 & 1/4 & -1/6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & -2 & 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow |A| = \left(\frac{1}{4}\right)(0)(0) + \left(\frac{-1}{6}\right)(-2)(-2) + \left(\frac{1}{2}\right)(0)(8) - \left(\frac{1}{2}\right)(0)(-2) - \left(\frac{1}{4}\right)(-2)(8) - \left(\frac{-1}{6}\right)(0)(0)$$

$$\Rightarrow |A| = 0 + \frac{-2}{3} + 0 - 0 + 4 - 0 = \frac{-2}{3} + 4 = \frac{10}{3}.$$

ملاحظه :

أذا كانت المصفوفه من الدرجه 4×4 أو 5×5 او .... $n \times n$ فلا يمكن ايجاد المحدد بالطرق السابقه وانما هنالك طرق اخرى لحساب محدد اي مصفوفه من الدرجه $n \times n$.

Some Properties of Determinants : بعض خواص محددات المصفوفات

Theorem (1) :

If all elements of one row or (one column) of square matrix A are zero , then $|A| = 0$.

أذا كانت كل عناصر صف واحد او (عمود واحد) في مصفوفه مربعه مثل A أصفار فأن محدد المصفوفه A يساوي صفر .

Example : Let $A = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, find $|A|$.

Solution :

بما ان الصف الثالث جميعه اصفار اذن من نظريه (1) نستنتج ان محدد A يساوي صفر

$\Rightarrow$ by Theorem (1) we get $\Rightarrow$ $|A| = 0$

Theorem (2) :

If there exists two rows or (two columns)of square matrix A are equal , then $|A| = 0$.

أذا وجد صفيين أو عموديين متساويين اي لهما نفس العناصر في مصفوفه مربعه مثل A فأن محدد ألمصفوفه A ايضا يساوي صفر .

Example : Let $A = \begin{bmatrix} -4 & 7 & -4 \\ 1/7 & 0 & 1/7 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, find $|A|$.

Solution :

بما أن عناصر العمود الاول يساوي عناصر العمود الثالث اذن حسب نظريه (2) فأن

$\Rightarrow$ by Theorem (2) we get $\Rightarrow$ $|A| = 0$

Theorem (3):

If one row or (one column) in a square matrix A is a multiple of another row or (column) , then $|A| = 0$

Example :

Let $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ **, find $|A|$.**

Solution :

By Theorem (3) we get $\Rightarrow |A| = 0$

لأن عناصر الصف الاول ضعف عناصر الصف الثالث أذن حسب مبرهنه (3) فأن محدد المصفوفه A يساوي صفر

Theorem (4) : **If A and B are square matrices , then $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$**

In general بصوره عامه

$$|A_1 \cdot A_2 \cdots A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

Example :

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ **and** $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ **, find , $|A|$, $|B|$, $|A \cdot B|$, $|A^3 \cdot B|$**

Solution :

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1) \cdot (0) - (2) \cdot (3) = -6$$

$$\Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (1) \cdot (2) - (0) \cdot (7) = 2$$

$$\Rightarrow |A \cdot B| = |A| \cdot |B| = (-6) \cdot (2) = -12$$

$$\Rightarrow |A^3 \cdot B| = |A \cdot A \cdot A \cdot B| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |B|$$ **(By theorem(4))**

$$= (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (2) = -432$$

Theorem (5) :

If A is a triangular matrix , then the determinant of a matrix A is an equal to the product of the elements of main diagonal .

أذا كانت المصفوفه مصفوفه مثلثيه (نقصد هنا مثلثيه عليا أو سفلى) فأن محدد المصفوفه المثلثيه A العليا او المصفوفه المثلثيه السفلى هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

Example (1): **Let** $A=\begin{bmatrix} 4 & -7 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **, find** $|A|$.

Solution :

Since A is a triangular matrix , then by Theorem(5) we get:

$\Rightarrow |A| = (4)(5)(-1) = -20$

Example (2): **Let** $A=\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 15 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ **, find** $|A|$ **.**

Solution :

Since A is a triangular matrix , then by Theorem(5) we get:

$\Rightarrow |A| = (-7)(8)(-2) = 112$

Theorem (6) : **If A is a square matrix , then** $|A^T| = |A|$.

Example : **Let** $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} + & + & + & - & - & - \end{matrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \left|\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{matrix}\Bigg|$$

$\Rightarrow$ $|A|$ = **168+0+0 – 0 – 135 – 0 = 168 – 135 = 33**

And

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ |A^T| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \\ 0 & 9 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ $|A^T|$ **= 168+0+0 – 0 – 135 – 0 = 168 – 135 =33**

Then , $|A^T|$ **=** $|A|$

Theorem (7) : if A is an $n \times n$ **invertible matrix , then** $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Example :

Let A= $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ **, find** $|A^{-1}|$ **?**

Solution :

Since , $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ **= 9 – 12 = – 3**

And , by theorem (7) $\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{3}$

واجب

(Q1) **Let B =** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}$ **, find** $|B|$

(Q2) **Let A=** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \\ -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ **. Find** $|A^2A^{-1}|$ **,** $|A^T|$

(Q3) **Let A=** $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ **and B=** $\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Find

$|A^{-1}|$, $|B^{-1}|$, $|A \cdot B|$, $|B \cdot A|$, $|B \cdot A^2\ A^{-1}|$, $|A^T \cdot B^{-1}|$, $|A^{-1} \cdot A^2B|$

(Q4) **Let A=** $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -5 & -9 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **, find** $|A|$, $|A^T|$, $|A^{-1}|$, $|A^3|$

(Q5) **Let $|B|=2-2i$. Find $|A|$ such that A=** BBB^TB^{-1}