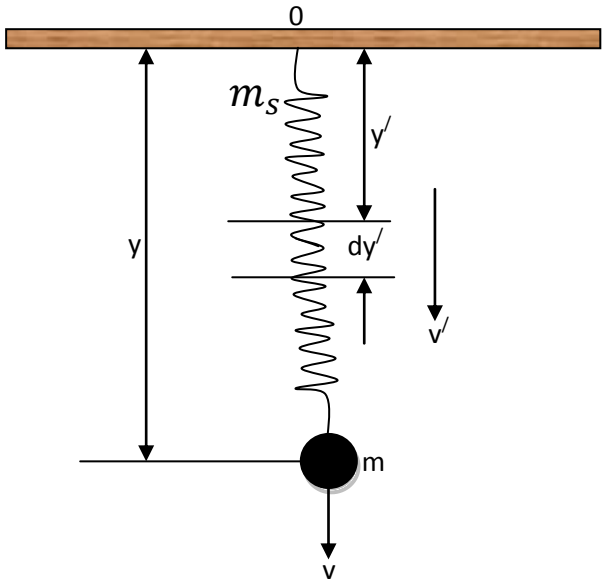
مثال 1:- اثبت أن الفترة الزمنية للتذبذب :- $t = 2\pi\sqrt{\frac{m+(m_s/3)}{k}}$ وذلك لنابض بكتلة (m_s) ؟

الحل :-



إن النسبة $(\frac{y/}{y})$ تكون ثابتة و ذلك لأي حالة من التوسع أو الانضغاط ، وبعبارة أخرى فأن :- $\frac{y/}{y} = k$ ، حيث أن (k) يطلق عليه بثابت التناسب، $y/ = ky$:-

$$\frac{dy/}{dt} = k\frac{dy}{dt} \rightarrow v/ = kv, \text{ولكن: } -k = \frac{y/}{y} \rightarrow v/ = \left(\frac{y/}{y}\right)v$$

إن كتلة وحدة الطول للنابض يعبر عنها كالتالي :- $\sigma = \frac{m_s}{y}$ ، وهكذا فان مقدار صغير من المادة سيساوي :- $(\sigma dy/)$ وطاقته الحركية ستساوي:-

$$dE_k = \frac{1}{2}(\sigma dy/)\mathrm{v}/^2$$

$$dE_k = \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{y}dy^{/}\right)\left(\frac{y^{/}}{y}v\right)^2 = \left(\frac{m_s v^2}{2y^3}\right)y^{/2}dy^{/}$$

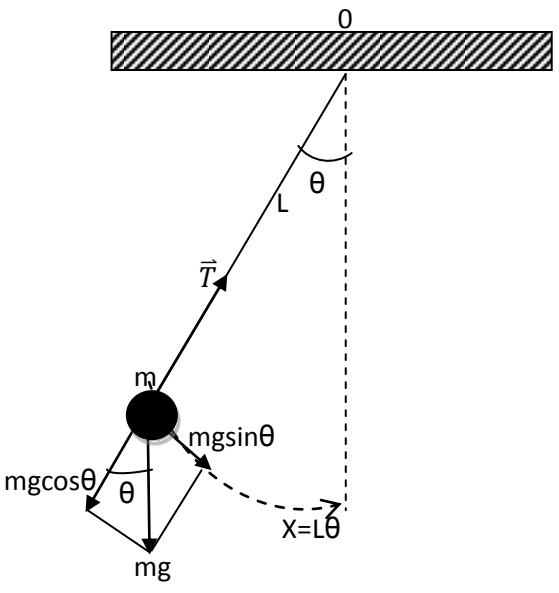
$$\int dE_k = E_k = \left(\frac{m_s v^2}{2y^3}\right)\int_0^y y^{/2}dy = \left(\frac{m_s v^2}{2y^3}\right)\int_0^y k^2 y^2 dy$$

$$E_k = \left(\frac{m_s v^2}{2y^3}\right)k^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^y = \left(\frac{m_s v^2}{2y^3}\right)k^2 * \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{3}\right)v^2 k^2$$

إن المعادلة الأخيرة تبين انه فقط ثلث من كتلة النابض ستساهم بمقدار الطاقة الحركية ، أو انه الكتلة الفعالة للنابض تمتلك المقدار $(\frac{m_s}{3})$ وهذا بدوره يعني أن كتلة التذبذب الكلية ستساوي :- $\left[m + \left(\frac{m_s}{3}\right)\right]$،وهكذا فان الفترة الزمنية للتذبذب تعطى بالاستعانة بصيغة الزمن للحركة التوافقية البسيطة كالتالي :-

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow t = 2\pi\sqrt{\frac{m + \left(\frac{m_s}{3}\right)}{k}}$$

*البندول البسيط :-



من الشكل أعلاه فان هنالك اثنين من القوى التي تؤثر على كرة البندول ، والتي هي الشد في الخيط $(\vec{T})$ ووزن الكرة $(m\vec{g})$:-

$$T - mg\cos\theta = F = ma, v = cons. \rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} = 0, a_N = \frac{v^2}{L}$$

وهكذا فأن (a) يمكن أن يتم التعبير عنها باستخدام المركبة العمودية للتعجيل (a_N) والتي تتوجه نحو مركز الدائرة ، حيث إذا كانت (v=0) سنحصل على:-

$$T - mg\cos\theta = m * \left(\frac{(v=0)^2}{L}\right) \rightarrow T = mg\cos\theta$$

إن المركبة الأخرى تمثل القوة المعيدة ، والتي دائماً تحاول أن تعيد الجسيمة إلى موقع الاستقرار :- $F = -mg\sin\theta$ ، وإذا كانت (θ) صغيرة جداً :-

$$\sin\theta = \frac{x}{L}, \rightarrow \sin\theta \cong \theta \rightarrow \theta = \frac{x}{L}$$

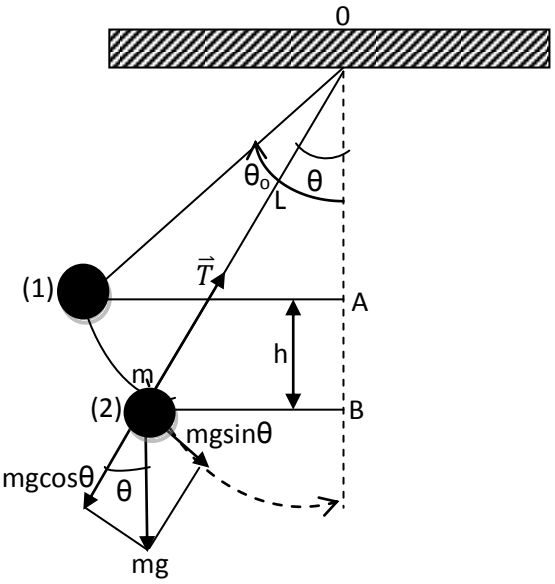
$$x = L\theta \rightarrow F = -mg\theta = -\left(\frac{mg}{L}\right)x$$

والتي تعني بأن القوة المعيدة تتناسب مع الإزاحة وتكون باتجاه معاكس لها ، ولاحظ أن الثابت $(\frac{mg}{L})$ يكون مكافئ للثابت (k) . وألان سنتمكن من حساب الفترة الزمنية للتذبذب للبندول البسيط بكتلة (m) بواسطة المعادلة التالية التي توضح أن الزمن لا يعتمد على كتلة الجسيمة (m):-

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, k = \frac{mg}{L}, \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

مثال 2:- احسب التعبير الرياضي للشد في خيط البندول البسيط وذلك كدالة للزاوية التي تصنع مع الاتجاه العمودي ؟

الحل:-



$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{L}, \rightarrow T = m\left(g\cos + \frac{v^2}{L}\right)$$

ومع ذلك فأن السرعة (v) لكرة البندول ستتغير كذلك مع الزاوية (θ) ، وهكذا إذا بدأت كرة البندول حركتها من الموقع (1) عند الزاوية (θ_o) حيث (v_o=0):-

$$W = mgh = \frac{1}{2}m(v^2 - v_o^2) = \frac{1}{2}mv^2$$

حيث أن (v) يمثل سرعة الكرة عند الموقع (2) :-

$$\therefore v^2 = 2gh \text{ ,ولكن, } h = OB - OA$$

$$\therefore h = L\cos\theta - L\cos\theta_o = L[\cos\theta - \cos\theta_o]$$

وهكذا فأن :- $v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_o)$ ، و تكون الصيغة النهائية للشد كالتالي :-

$$\therefore T = m\left[g\cos\theta + \frac{2gL}{L}(\cos\theta - \cos\theta_o)\right]$$

$$= mg[(\cos\theta + 2\cos\theta - 2\cos\theta_o)]$$

$$\therefore T = mg[3\cos\theta - 2\cos\theta_o]$$