*الحركة التوافقية البسيطة :-

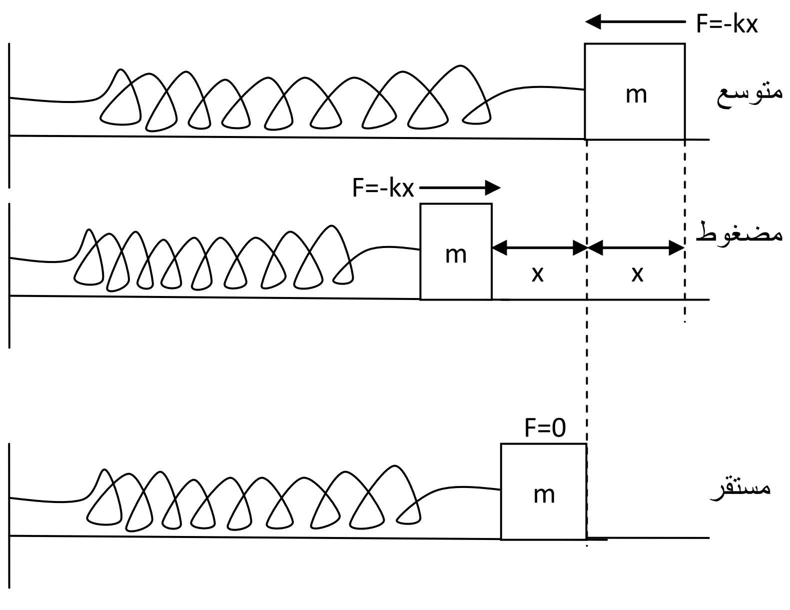
إن أي حركة تعيد نفسها وذلك في فترات زمنية منتظمة سيطلق عليها بالحركة الدورية ، إن الحل لمعادلات الحركة الدورية سيتضمن في معظم الأحيان دوال (sin,cos) ولذلك يطلق عليها بالتوافقية .

قانون هوك :- إذا تغير شكل الجسم الصلب ، فأنه سيقاوم هذا التغيير بواسطة قوة تتناسب طردياً مع مقدارها إذا لم تكن كبيرة بشكل كبير .

$$F(x) = -\frac{dE}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\therefore \; \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$



ولإيجاد موقع الجسيمة وذلك كدالة للزمن ، فلذلك يجب إيجاد دالة مثل x(t) والتي تحقق هذه العلاقة ، حيث أن المشتقة الثانية لها ستساوي إلى نفس الدالة مضروبة بالثابت $(\frac{k}{m})$ وبالإشارة السالبة :-

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$

وإذا افترضنا أن الإزاحة تعطى بالمعادلة التالية :-

$$x = A\,cos(\omega t + \varphi)$$

حيث أننا نعرف بأن كل دوال الجيب و الجيب تمام تخضع للمتطابقة التالية :-

$$cos(\omega t + \varphi) = \cos(\varphi)\cos(\omega t) - \sin(\varphi)\sin(\omega t)$$

$$= \mathrm{a}\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

حيث أن (A, ω, φ) هي عبارة ثوابت مجهولة .

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\,A\,sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\,A\,cos(\omega t + \varphi)$$

وبتعويض هذه النتائج في المعادلة :- $(\frac{d^2x}{dt^2} = -kx)$ سنحصل على :-

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \varphi)$$

وإذا قمنا باختيار الثابت (ω) بحيث يكون مساوي إلى :-

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

ومن ثم فأن :-

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

وان الفترة الزمنية للحركة تكون كالتالي:- $T = \frac{2\pi}{\omega}$، أما الإزاحة فتعطى بالمعادلة :-

$$\therefore x = A\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = A\cos[\omega t + 2\pi + \varphi]$$

$$= A\cos[\omega t + \varphi]$$

وبما انه:- $\omega^2 = \frac{k}{m} \to \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \to \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}}$،فالفترة الزمنية تكون كالتالي :-

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

إن التردد (f) للمتذبذب يمثل عدد الاهتزازات الكلية لكل وحدة زمنية وسيعطى

بواسطة المعادلة التالية:- $f = \frac{1}{T\left(=\frac{2\pi}{\omega}\right)} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ ، والتردد الزاوي

يعطى بالمعادلة التالية :-

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \frac{rad(\text{زاويةنصف قطرية})}{sec}$$

وان اتساع و مدى الحركة يعطى بالمعادلة التالية :- $A = x_{max}$ ،و الكمية التالية :-

$(\omega t + \varphi)$ يطلق عليها بطور الحركة . والثابت φ يطلق عليه بثابت الطور، وإذا

كانت $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ والزمن ($t=0$) فالإزاحة تكون كالتالي :-

$$x = A\cos\left[\omega t - \frac{\pi}{2}\right] = A\sin\omega t = A\sin\omega(0) = 0$$

وإذا كانت $\varphi = 0$ والزمن ($t=0$) فالإزاحة تكون كالتالي :-

$$x = \text{A}\cos(\omega t + 0) = A\ \cos\omega t = A\ \cos\omega(0) = A = x_{max}$$

*اعتبارات الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة :-

بما أن الإزاحة تعطى بالمعادلة التالية:- $x = A\cos(\omega t + \varphi)$،فسنحصل على :-

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E = E_P + E_k$$

$$E = \frac{1}{2}A^2[kcos^2(\omega t + \varphi) + (m\omega^2 = k)sin^2(\omega t + \varphi)]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2[cos^2(\omega t + \varphi) + sin^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}kA^2$$

وسنحصل على صيغة أخرى لمعادلة السرعة وذلك بإيجاد قيمتها المربعة :-

$$v^2 = A^2\omega^2 sin^2(\omega t + \varphi) = A^2\omega^2[1 - cos^2(\omega t + \varphi)]$$

$$cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{x^2}{A^2} \rightarrow v^2 = A^2\omega^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$$

$$\mathrm{v}^2 = A^2\omega^2\left(\frac{A^2 - x^2}{A^2}\right) \rightarrow \therefore v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\frac{k}{m}\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

وهذه العلاقة توضح أن السرعة تكون بقيمتها النهائية العظمى في موقع الاستقرار

(x=0) وحسب العلاقة التالية :- $v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}A^2} = \pm\sqrt{\omega^2 A^2} = \pm\omega A$ ،

وتكون السرعة مساوية للصفر عند موقع الإزاحة العظمى $(x = x_{max} = A)$:-

$$\therefore v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - A^2)} = \pm\sqrt{\frac{k}{m} * (0)} = 0$$

وعندما نقوم بتكامل المعادلة الأخيرة سنحصل على الموقع(x)وذلك كدالة للزمن(t):-

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - A^2cos^2(\omega t + \varphi)\right)} =$$

$$= \pm\sqrt{\omega^2 A^2\left(1 - cos^2(\omega t + \varphi)\right)}$$

$$\therefore\ v = \frac{dx}{dt} = \pm\omega A\sqrt{sin^2(\omega t + \varphi)} = -A\omega\ sin(\omega t + \varphi)$$

$$\int dx = -\int \omega A\ sin(\omega t + \varphi)dt = -A\int sin(\omega t + \varphi)\ \omega dt$$

$$x = -A[-\cos(\omega t + \varphi)] = A\cos(\omega t + \varphi)$$