الإحصاء الحياتي

محاضرة (15)

بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

اولا توزيع ذي الحدين :- The Binomial Distribution.

إذا كانت هناك تجربه عشوائية لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين (نجاح) او عدم ظهور الحدث (فشل) مثل نجاح الطالب او فشلة، المصباح الكهربائي جيد او تالف، الشخص مصاب بمرض او غير مصاب . ومن هنا جاءت تسمية ثنائي الحدين .
إذا أجريت هذه التجربة nمن المحاولات(المرات) المستقلة بحيث ان نتائج كل محاولة تتمثل بإحداث حالتين فقط وهي نجاح المحاولة او فشلها ، واذا فرضنا ان p تمثل احتمال نجاح المحاولة وان q = p-1 تمثل احتمال فشل المحاولة ، حيث p + q =1 .
نفرض أن X هو التغير العشوائي المعرف على هذه التجربة و يرمز الى عدد مرات النجاح لهذه التجربة.
يقال ان المتغير العشوائي X يتوزع على وفق توزيع ذي الحدين (ثنائي الحدين) اذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية له بالشكل التالي

$$p(x) = C_x^n\, p^x\, q^{n-x} \qquad , x = 0,1,2,3,\ldots\ldots,n$$
$$=0 \qquad\qquad , \text{o.w} \quad \text{عدا ذلك}$$

حيث ان : $0 < p < 1 \quad , \quad q = 1 - p$

مفكوك ذي الحدين.

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} C_x^n\; b^x\, a^{n-x}$$

خواص $p(x)$

(1) $p(x) \geq 0$
(2) $\sum_{x=0}^{n} p(x) = 1$

حيث أن $C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

$x = 0,1,2,\ldots\ldots n$

تسمى $p(x)$ دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي x الذي توزع توزيع ذي الحدين وبالمعلمتين n,p
ويرمز لذلك بالرمز $X \sim b(n,p)$
و اذا قلنا مثلاً أن فى هذه الحالة $X \sim b\left(5,\frac{1}{3}\right)$ تكون دالة كثافة الاحتمال

$$p(x) = C_x^5 \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \quad x = 0,1,2,\ldots\ldots,5$$

ثانيا :ـ بعض المقاييس الخاصة لهذا التوزيع

1. الوسط الحسابي لقيم X هو np
2. التباين لقيم X هو npq
3. الانحراف المعياري لقيم X هو$\sqrt{npq}$

مثال 1:ـ لتكن p(x) هى دالة كتلة احتمال توزيع ذى الحديين معرفة كما يلى

$$p(x) = \begin{cases} C_x^7 \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-x}, x = 0,1,2,\ldots\ldots,7 \\ 0 \end{cases}$$

جد مايلى:
1. المعدل الحسابي

2. التباين
3. $p(0 \le X \le 1)$
4. $P(X=5)$

$$1)\ \therefore \mu = np = \frac{7}{2}$$

$$2)\sigma^2 = np(1-p) = \frac{7}{2}$$

$$3)p(0 \le X \le 1) = \sum_{x=0}^{1} p(x) = C_0^7 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-0} + C_1^7 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-1}$$

$$= \frac{1}{128} + \frac{7}{128} = \frac{8}{128} = \frac{1}{16}$$

$$4)P(X=5) = f(5) = \binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{128}$$

ملاحظة هامة :-

اذا كان عدد المحاولات يســـاوى واحد n= 1 فأن توزيع ذى الحدين يأخذ الشكل الآتى:ـ

$$p(x) = \begin{cases} C_1^7 p^x (1-p)^{1-x}, x = 0,1 \\ 0, \qquad\qquad\qquad o,w \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, x = 0,1 \\ 0, \qquad\qquad\qquad 0,w \end{cases}$$

و يطلق علية اسم توزيع برنولى **Bernoulli Distribution**.

مثال :ـ عند الغاء عملة مرة واحدة فأن دالة كثافة الاحتمال لظهور الوجة هى

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}, x = 0,1 \\ 0, \qquad\qquad\qquad o,w \end{cases}$$

و معنى هذا أن التوزيع المذكور يعتبر حالة خاصة من توزيع ذي الحدين عندما تكون n = 1

لاحظ ان

$$P(X \le x) = \sum_{X=0}^{n} C_x^n\, p^x (1-p)^{n-x},$$

في المثال 1 : اوجد $P(X \le 3)$ =p(1)+p(2)+p(3)

تمرين :اذا كان لديك توزيع ذو الحدين بالمعلمتين n=10 وp=0.6 اوجد مايلي:

P(x=5) , p(x ≤ 2) , p(x>8)