مقدمة في الاحتمالات
Introduction to Probability

1.طرق العد (Methods of counting)

تعريف : (مفكوك n): مفكوك العدد n هو :

$$n\,! = n\ \ (n-1)(n-2)\ \ldots..1$$

مثال:
مفكوك العدد $n! = 4$ *؟*

الحل:

$$4!=(4\times3\times2\times1)=24$$

1- التباديل Permentation:-

يقصد بالتباديل بأنها عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء تأخذ كلها او بعضها ويرمز له بالرمز nP_r

$$nP_r = \frac{n!}{(n-1)!}$$

مثال1 :
اذا كان لدينا اربعة حروف A , B , C , D واختير منها حرفان فما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار حرفين من هذه الاحرف.
وهي:

$$nP_r = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12$$

AC , AD ,AB ,BC ,BD ,CD, CA ,DA ,BA , CB , DB ,DC

مثال2:
كتبت الارقام من 1 الى 9 على بطاقات ووضعت في صندوق ثم سحبت منها 5 بطاقات الواحدة بعد الاخرى فكم عدد خماسياً ارقامها مختلفة يمكن تكوينها ؟

$$nP_5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\,!}{4!} = 15120$$

اذا كانت n=r حيث مضروب صفر !0 = 1

مثال:

اذا اراد طالب ان يرتب 4 كتب مختلفة المواضع على رف مكتبته فبكم طريقة يمكن ترتيبها ؟

من الوجهة العلمية اذا كانت $r = n$ فأن عدد التباديل هو عدد الطرق التي يمكن ترتيب n من الاشياء على خط مستقيم

الحل :

يمكن اختيار الكتاب الاول بأربعة طرق 4

يمكن اختيار الكتاب الثاني بثلاثة طرق 3

يمكن اختيار الكتاب الثالث بطريقتين 2

يمكن اختيار الكتاب الرابع بطريقة واحدة 1

$$4P_4 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{1} = 24$$

ملاحظة 1:

مضروب الصفر = 1 ($Factorial\ 0! = 1$)

ملاحظة 2 :

التباديل في حالة وجود مجاميع متشابهة .

(حالة مجموعتين)

n = العدد الكلي

$m1$ =عدد عناصر المجموعة (1)

$m2$ = عدد عناصر المجموعة (2)

وعليه يكون عدد التباديل هو

$$P = \frac{n!}{m1!\ \times m2!}$$

مثال:

ماهي الطرق التي يمكن بها ترتيب احرف كلمة باب ؟

عدد الاحرف= 3 $n = 3$

حرف ب = 2 $m1 = 2$

حرف أ = 1 $m2 = 1$

اذن عدد التباديل هو

$$P = \frac{n!}{m1!\times m2!} = \frac{3!}{2!\times1!} == \frac{3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}\times1!} = 3$$

مثال:

ماهو عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من احرف كلمة Statistics ؟

الحل :
عدد الحروف = 10
حرف S تكرر 3 مرة
حرف t تكرر 3 مرة
حرف a تكرر 1 مرة
حرف i تكرر 2 مرة
حرف c تكرر 1 مرة

$$P = \frac{n!}{m1! \times m2! \times m3! \times m4! \times m5!}$$

$$P = \frac{10!}{3! \times 3! \times 1! \times 2! \times 1!}$$

$$P = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1} = 50400$$

2. التوافيق Combination :-

يقصد بالتوافيق طرق الاختيار الغير مرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء يأخذها كلها او بعضها ويرمز للتوافيق بالرمز nC_r

$$\boldsymbol{nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

نأخذ r من العناصر في كل مرة من مجموعة مكونة من n من العناصر بغض النظر عن الترتيب

مثال :

ماعدد طرق الاختيار التي يمكن الحصول عليها لأختيار لجنة مؤلفة من 5 صيادلة من مجموع 9 صيادلة؟

$$9C_5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9\times8\times7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}\times4\times3\times2\times1} = \frac{\cancel{9}\times\cancel{8}\times7\times\cancel{6}}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1} = 126$$

ملاحظة:

هناك قاعدتان اساسيتان يعتمد عليها كل من التباديل والتوافيق .

1- اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث (E1) هو n وعدد الطرق لوقوع الحادث (E2) هو m وكان E1 او E2 حادثان متنافيان فأن عدد الطرق لوقوع الحادث E1 او E2 = (n+m) من الطرق.
2- اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E1 هو n وان عدد الطرق الممكنة لوقوع E2 هو m وكان E1 و E2 حدثان مستقلان فأن عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادثان E1 و E2 هو (m× n) من الطرق.

مثال :

كم لجنة سباعية يمكن اختيارها من 6 اطباء و 5 صيادلة على ان تضم 4 اطباء و 3 صيادلة؟

$$6C_4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6\times5\times4!}{4!\times2!} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

$$5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2\times1} = 10$$

اذن عدد الطرق = 15×10= 150

2. بعض المصطلحات والتعاريف :-

1- التجربة العشوائية The Random Experiment

هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتيجتها مسبقا لخضوعها لقوانين الاحتمال .

مثال:

- ان رمي زار الطاولة هي تجربة عشوائية لان النتائج الممكنة لهذه التجربة تخضع لقوانين الاحتمال.
- رمي قطعة النقود هي ايضا تجربة عشوائية .

2- فضاء العينة Sample Space:-

فضاء العينة هو مجموعة من النقاط تمثل جميع النتائج الممكنة لتجربة ما حيث ان كل نتيجة تمثل بنقطة او عنصر في فضاء العينة .

- في حالة رمي قطعة نقود فأن فضاء العينة سيتكون من نتيجتين ممكنتين T و H

اي A = { H , T }

- وعند رمي قطعتي نقود فأن فضاء العينة سيتكون اربعة نتائج :

اي A = {HH, HT , TH , TT }

- وعند رمي زار الطاولة مره واحده فأن فضاء العينة يكون 6 نتائج ممكنة :

A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5, 6}

3- الحادث The Event:-

هو نقطة او عدة نقاط في فضاء العينة ويرمز له بالرمز (Ei) فالحصول على الصورة (H) في رمي قطعة النقود مرة واحدة يسمى حادثاً وهو يتكون من نقطة واحدة (H) من مجموع نقاط فضاء العينة {H , T}, وكذلك فأن الحصول على عدد زوجي في رمي زار الطاولة يسمى ايضاً حادثاً يتكون من النقاط {2 , 4 , 6 } من مجموع نقاط فضاء العينة {1 , 2 , 3, 4 , 5 , 6 } . والحادث يكون بسيط اذا تكون من نقطة واحدة في فضاء العينة اي حالة واحدة من الحالات التي تظهر نتيجة التجربة او يكون حدثاً مركباً اذا شمل حالتين او اكثر من الحالات التي تظهر نتيجة التجربة .

انواع الحوادث :-

1- الحوادث المتنافية (المستبعدة) Mutually (exclusive) events

يقال ان الحدثين E1 و E2 انهما متنافيان (مستبعدان) اي استحالة حدوثهما معاً .

مثلاً عند رمي قطعة نقود من المستحيل الحصول على صورة وكتابة في نفس الوقت .

2- الحوادث غير المتنافية

وهي اما احداث مستقلة او احداث غير مستقلة

أ- الحوادث المستقلة Independent Event

هي الحوادث التي اذا وقع احدهما لا يمنع او يؤثر على وقوع الاحداث الاخرى .

فمثلا عند رمي قطعتي نقود فالحصول على صورة في القطعة الاولى مثلاً لا يؤثر في نتيجة القطعة الثانية .

صندوق الكرات: عند سحب الكرة الاولى وارجاعها لا يؤثر في نتيجة السحبة الثانية .

ب- الحوادث غير المستقلة Non Independent Events

هي الحوادث التي اذا وقع احدهما يؤثر في وقوع الاحداث الاخرى ففي حالة صندوق به كرات فعند سحب كرتان على التوالي بدون ارجاع فأن نتيجة السحبة الاولى تؤثر في نتيجة السحبة الثانية .

الحالات الممكنة Possible Cases :-

هي جميع الحالات المختلفة التي يمكن ان تظهر في تجربة ما , فعند رمي قطعة نقود فعدد الحالات الممكنة هنا حالتين صورة وكتابة وعند رمي زار الطاولة عدد الحالات الممكنة 6 وعند رمي زارين عدد الحالات الممكنة $6 \times 6 = 36$.

الحالات المؤاتية Favorable Cases:-

هي الحالات التي تحقق طور الاحداث المراد دراستها وتسمى بحالات النجاح.