جامعة المستقبل
كلية التقنيات الطبية والصحية
قسم تقنيات الاشعة

السنة / الرابعة
العام الدراسي/2023-2024

الإحصاء الحياتي
محاضرة (12)

تطبيقات على الاحتمالية

1. التعريف الاحصائي للاحتمال (classical definition of probability) :

يعتمد هذا التعريف على اجراء عدد كبير من التجارب الميدانية او على جمع عدد كبير من المعلومات الإحصائية ثم البحث فيها عن عدد مرات تحقق الحادث المطلوب.

فاذا رمزنا لعدد التجارب التي تم اجراؤها بالرمز n ، ولعدد مرات تحقق الحادث المطلوب خلال هذه التجارب بالرمز m ، فان التعريف الاحصائي للاحتمال يعطى بالعلاقة :

$$\text{احتمال تحقق الحادث A} = \frac{\text{عدد مرات تحقق الحادث خلال التجارب}}{\text{العدد الكلي(مجموع التكرارات)}}$$

نكتب ذلك على الشكل التالي $P(A) = \frac{m}{n}$

وان هذا الاحتمال يزداد دقة كلما ازداد عدد التجارب المنجزة .

مثال : في احدى مدارس الأطفال وجد 50 حالة تسوس من اصل 350 تلميذا يدرسون في تلك المدرسة . احسب احتمال (نسبة) تسوس لدى الأطفال .

احتمال التسوس لدى الأطفال (A) يساوي :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{50}{350} = \frac{1}{7}$$

أي ان واحد من كل سبعة أطفال يعاني من تسوس الاسنان .

ملاحظة: اذا اردنا ان نحصل على نتيجة ادق من ذلك علينا ان نتوسع في عمليات الكشف الطبي ونجريه في جميع المدارس ، وعلى جميع الأطفال من نفس العمر.

مثال:

في دراسة للولادات خلال عام ما وفي مدينة معينة ، وجدنا ان عدد الولادات بلغ 1500 مولودا حيا ، وان عدد الذكور فيهم كان 800 ذكرا ، وعدد الاناث 700 انثى ، فما هو احتمال ولادة الذكر ، وما هو احتمال ولادة الانثى؟:

$$\text{احتمال ولادة الذكر} = \frac{\text{عدد مرات التحقق}}{\text{عدد التجارب المدروسة}}$$

$$P(M) = \frac{800}{1500} = \frac{8}{15}$$

$$\text{احتمال ولادة الانثى} = \frac{\text{عدد مرات التحقق}}{\text{عدد التجارب المدروسة}}$$

$$P(F) = \frac{700}{1500} = \frac{7}{15}$$

2.تطبيقات على حساب الاحتمالات :

مثال: كانت اجابات 200 طالبا وطالبة عما اذا كانوا يدخنون ام لا، كما في الجدول التالي :

النوع / الجواب	ذكر M	انثى F	المجموع
S مدخن	35	15	50
$\overline{S}$ غير مدخن	85	65	150
المجموع	120	80	200

وهنا نلاحظ انه يمكننا الحصول على النسب والاحتمالات المختلفة بتقسيم التكرارات الهامشية والداخلية على المجموع العام (200) ، والحصول على الاحتمالات الشرطية بتقسيم التكرارات الداخلية على المجاميع الهامشية (في العمود الأخير او السطر الأخير) كما يلي:

1. اذا اقمنا بتقسيم كل التكرارات الداخلية والهامشية على المجموع العام (200) فإننا سنحصل على النسب المعروضة في الجدول التالي :

البيان	M	F	Σ
S	35/200	15/200	50/200
$\overline{S}$	85/200	65/200	150/200
Σ	120/200	80/200	1

نسبة المدخنين الكلية(احتمال التدخين) $P(S) = \frac{50}{200}$

نسبة غير المدخنين الكلية(احتمال عدم التدخين) $P(\bar{S}) = \frac{150}{200}$

نسبة الذكور في العينة (احتمال ظهور الذكور) $P(M) = \frac{120}{200}$

نسبة الاناث في العينة (احتمال ظهور الانثى) $P(F) = \frac{80}{200}$

نسبة المدخنين الذكور (احتمال ان يكون مدخنا وذكرا) $P(S \cap M) = \frac{35}{200}$

نسبة المدخنين الاناث(احتمال ان يكون مدخنة وانثى) $P(S \cap F) = \frac{15}{200}$

نسبة غير المدخنين الذكور (احتمال ان يكون غير مدخن وذكر) $P(\overline{S} \cap M) = \frac{85}{200}$

نسبة غير المدخنين الاناث (احتمال ان تكون غير مدخنة وانثى) $P(\overline{S} \cap F) = \frac{65}{200}$

2. واذا قسمنا كل التكرارات الداخلية في كل سطر على مجموع ذلك السطر فإننا سنحصل على الاحتمالات الشرطية التالية:

احتمال ان يكون المدخن ذكرا $P(M/S) = \frac{35}{50}$

احتمال ان يكون المدخن انثى $P(F/S) = \frac{15}{50}$

احتمال ان يكون غير مدخن ذكرا $P(M/\overline{S}) = \frac{85}{150}$

احتمال ان يكون غير مدخن انثى $P(F/\overline{S}) = \frac{65}{150}$

البيان	M	F	Σ
S	$\frac{35}{50}$	$\frac{15}{50}$	1
$\overline{S}$	$\frac{85}{150}$	$\frac{65}{150}$	1

3. اذا قسمنا كل من التكرارات الداخلية في كل عمود على مجموع ذلك العمود فإننا سنحصل على الاحتمالات الشرطية التالية:

احتمال ان يكون الذكر مدخنا $P(S/M) = \frac{35}{120}$

احتمال ان يكون الذكر غير مدخن $P(\overline{S}/M) = \frac{85}{120}$

احتمال ان تكون الانثى مدخنة $P(S/F) = \frac{15}{50}$

احتمال ان تكون الانثى غير مدخنة $P(\overline{S}/F) = \frac{65}{50}$

وفي النهاية سنحصل على الجدول التالي:

البيان	M	F
S	$\frac{35}{120}$	$\frac{15}{80}$
$\overline{S}$	$\frac{85}{120}$	$\frac{65}{80}$
Σ	1	1

وهكذا نجد ان احتمالات التقاطع السابقة تساوي

$$P(S \cap M) = P(S).P(M/S) = \frac{50}{200}.\frac{35}{50} = \frac{35}{200}$$

$$P(\overline{S} \cap M) = P(\overline{S}).P(M/\overline{S}) = \frac{150}{200}.\frac{85}{150} = \frac{85}{200}$$

$$P\,(S\cap F) = P(S)\,.P(F/S) = \frac{50}{200}.\frac{15}{50} = \frac{15}{200}$$

$$P\,(\overline{S}\cap F) = P(\overline{S})\,.P(F/\overline{S}) = \frac{150}{200}.\frac{65}{150} = \frac{65}{200}$$

ولحساب الاحتمالات الشرطية اللاحقة نفترض أولا انه بعد اجراء الدراسة وجدنا ان احدى الاستمارات او الإجابات لم تتضمن جوابا على سؤال التدخين وبعد التدقيق والمراجعة وجدنا صاحبها كان ذكرا فكيف يمكننا حساب احتمال ان يكون هذا الشخص مدخنا ؟

نلاحظ ان المطلوب هو حساب الاحتمال الشرطي اللاحق P(S/M) واعتمادا على القاعدة التالية:

$$P(S/M) = \frac{P(S).P(M/S)}{P(S).P(M/S)+P(\overline{S}).P(M/\overline{S})}$$

$$= \frac{\frac{50}{200}.\frac{35}{50}}{\frac{50}{200}.\frac{35}{50}+\frac{150}{200}.\frac{85}{150}} = \frac{\frac{35}{200}}{\frac{35}{200}+\frac{85}{200}} = \frac{35}{120}$$

ومن جهة أخرى نفترض أيضا انه من خلال التدقيق وجدنا استمارة أخرى غير واضحة وتبين ان صاحبها كان مدخنا ولكنه لم يذكر جنسه ، فما هو احتمال ان يكون صاحب هذه الاستمارة هذا المدخن ذكرا؟ أي ان الاحتمال المطلوب هو P(M/S)
لحساب هذا الاحتمال نعتمد على القاعدة التالية :

$$P(M/S) = \frac{P(M).P(S/M)}{P(M).P(S/M)+P(\overline{M}).P(S/\overline{M})}$$

$$= \frac{\frac{120}{200}.\frac{35}{120}}{\frac{120}{200}.\frac{35}{120}+\frac{80}{200}.\frac{15}{80}} = \frac{\frac{35}{200}}{\frac{35}{200}+\frac{15}{200}} = \frac{35}{50}$$

تمارين على الاحتمالات

مثال1:

اذا كان احتمال فصيلة دم احد المتبرعين بالدم من نوع A هو 0.35 واحتمال ان هذا المتبرع مصاب بضغط الدم هو 0.15 واحتمال انه مصاب بضغط الدم او فصيلة دمه من نوع A هو 0.40.

اوجد احتمال ان هذا المتبرع

1. مصاب بضغط الدم وفصيلة دمه من نوع A .
2. غير مصاب بضغط الدم.

الحل :

لنعرف الحادثتين : A فصيلة دم المتبرع من نوع A

B المتبرع مصاب بضغط الدم

المعطيات :

$$P(A \cup B) = 0.40$$

$$P(A) = 0.35$$

$$P(B) = 0.15$$

المطلوب: إيجاد

1. $P(A \cap B)$. بما ان

$$P(AUB) = P(AUB) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.40 = 0.35 + 0.15 - P(A \cap B)$$

ومنها نستنتج ان $P(A \cap B) = 0.10$

2. اذا كان B هو الحدث ان المتبرع مصاب بضغط الدم فان مكمل هذا الحدث (نرمز له بالرمز B^c) يرتبط مع الحدث B بالعلاقة التالية

$$P(B) + P(B^c) = 1$$

$$0.15 + P(B^c) = 1$$

ومنه نستنتج ان $P(B^c) = 0.85$

يمثل احتمال ان المتبرع غير مصاب بضغط الدم.

مثال2:

الجدول التالي يصنف 400 شخص حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم وعلى النحو التالي:

حالة التدخين / مستوى ضغط الدم	يدخن D	لا يدخن $\bar{D}$	المجموع
A ضغط مرتفع	40	10	50
B ضغط متوسط	70	130	200
C ضغط منخفض	165	95	150
المجموع	16	235	400

ولتكن التجربة هي اختيار احد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي

نفرض A: حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع

B: حادثة اختيار شخص مدخن

المطلوب : إيجاد احتمال ان الشخص الذي تم اختياره

1. ضغط دمه مرتفع
2. مدخن
3. ضغط دمه مرتفع ومدخن
4. ضغط دمه مرتفع وعلما بانه يدخن

الحل:

عدد نتائج التجربة هو n=400 وهي متساوية الفرص وعليه

$$P(A)=\frac{m(A)}{n}=\frac{50}{400}=0.125$$

$$P(D)=\frac{m(D)}{n}=\frac{165}{400}=0.4125$$

$$P(A\cap D)=\frac{m(A\cap D)}{n}=\frac{40}{400}=0.1$$

$$P(A|D)=\frac{p(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0.1}{0.4125}=0.2424$$

or

$$P(A|D)=\frac{m(A\cap D)}{m(D)}=\frac{40}{165}=0.2424$$