Al-Mustaqbal University

(اسم القسم)/ تقنيات البناء والانشاءات

(المرحلة) / الثانية

(اسم المادة) الرياضيات المتقدمة

المصفوفة Matrix

مفهوم المصفوفة من المفاهيم الرياضية المهمة حيث تستخدم في مجالات عديدة منها البرمجة الخطية وحل انظمة المعادلات الخطية والاحصاء الجبر الخطي وغير ذلك.

1-جمع وطرح المصفوفات

يجب أن تكون المصفوفات ذات نفس الأبعاد (أي نفس عدد الصفوف والأعمدة) لكي نتمكن من جمعها أو طرحها.

لجمع المصفوفات A+B، نقوم بجمع العناصر المقابلة:

Example 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Example 2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 16 & 18 & 20 \end{bmatrix}$$

لطرح المصفوفات A+B، نقوم بطرح العناصر المقابلة:

Example 1:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$$

Example 2:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

2- ضرب المصفوفات/ ضرب المصفوفات يتم عندما يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية. نقوم بضرب الصفوف في الأعمدة للحصول على الناتج.

مثال/اوجد حاصل ضرب المصفوفتين

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

.....

نضرب الصف من الاولى في العمود من الثانية . و النتيجة هي : عدد الصفوف من الاولى (3) وعدد الاعمدة من الثانية (1)

لذلك يكون لدينا :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 26 \\ -3 \end{bmatrix}$$

لاحظ كيف حصلنا على عناصر المصفوفة الناتجة :

9 = 3(1) + 2(0) + 1(3)

26 = 4(2) + 5(0) + 6(3)

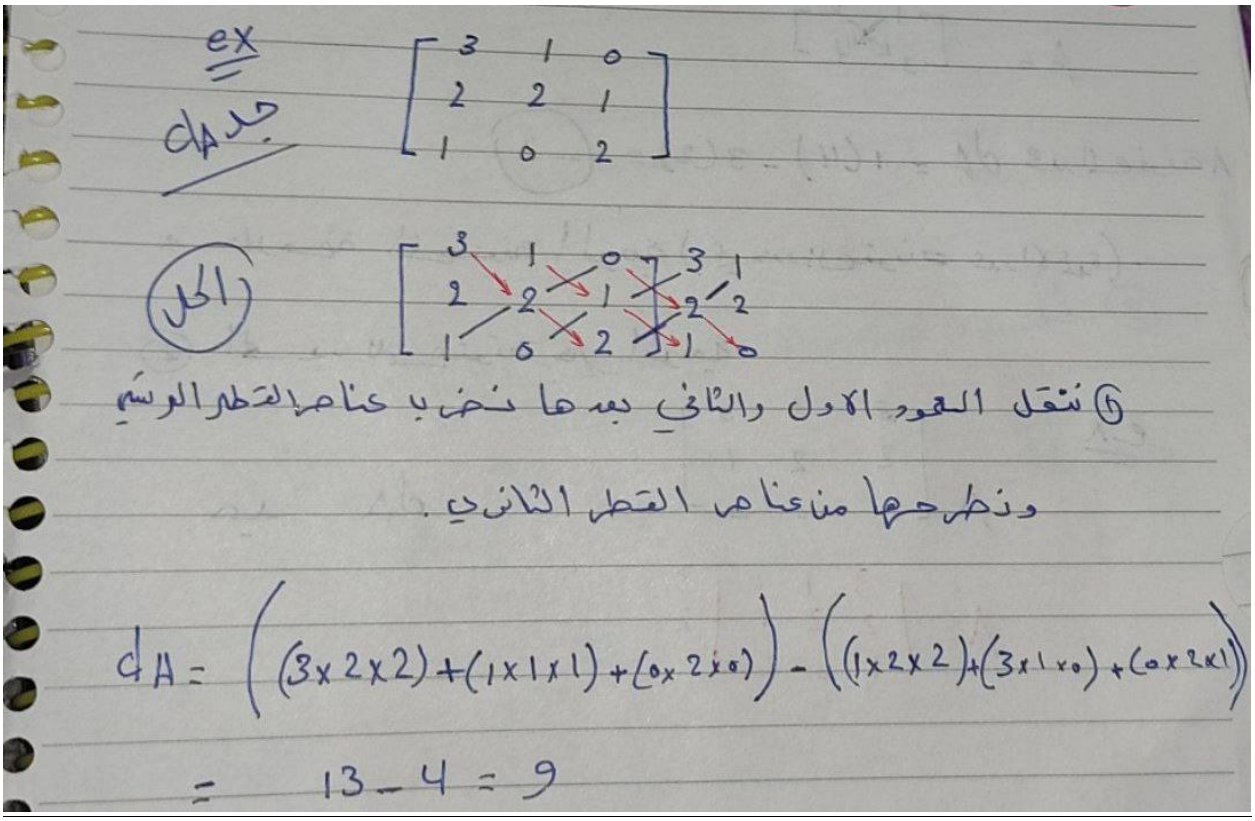
-3 = 0(2) + 2(0) + (-1)(3)

3-محدد المصفوفة determinate

Example/ $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = (3 \times 5) - (4 \times 2)$$

$$\det(A) = 15 - 8 = 7$$



4-معكوس المصفوفة inverse

مثال/اوجد معكوس المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

نجد المحدد :

$$D = 3(4) - 1(2) = 10$$

نبدل عناصر القطر الرئيسي ونقلب اشارات القطر الاخر ونضرب في المحدد فيكون :

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/10 & -1/10 \\ -2/10 & 3/10 \end{bmatrix}$$

وللتحقيق :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4/10 & -1/10 \\ -2/10 & 3/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.....

5-**محولة المصفوفة** transform

مثال/اوجد محولة المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

.....

لايجاد محولة المصفوفة نحول الصفوف الى اعمدة فتصبح كما يلي :

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال/اوجد : $(A\,B)^T$ اذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

.....

$$A\,B = \begin{bmatrix} 9 \\ 26 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$So \ : \ (A\,B)^T = [9 \quad 26 \quad -3]$$

6-طريقة كريمر للمحددات

مثال/حل بطريقة كريمر (المحددات)

$x + y - z = 5$

$2x + 3z = 6$

$y + 2z = 3$

1-نوجد محدد المعاملات من المعادلات الثلاثة :

فيكون محدد المعاملات:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(0-3) - 1(4-0) - 1(2-0) = -9$$

ثم نوجد المحدد المعدل بادخال عمود القيم المطلقة محل عمود معاملات **x** وهو محدد نستعمله لايجاد قيمة **x** لنقطة التقاطع كما سنرى ونسميه D_x:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5(-3) - 1(3) - 1(6) = -24$$

الان يمكن ايجاد **x** من المعادلة :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-24}{-9} = \frac{12}{4.5}$$

وبنفس الطريقة نوجد **y** و **z** :

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(3) - 5(4) - 1(6) = -23$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-23}{-9} = \frac{11.5}{4.5}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-6) - 1(6) + 5(2) = -2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-2}{-9} = \frac{1}{4.5}$$

واجب/ حل بطريقة كريمر

x+y=6

2x-3y=9