

إذا طلب في السؤال حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية (second order) ولم يعطيك أحد الحلول كما في الطريقة السابقة فنتبع الخطوات التالية للحل:

1. تحويل المعادلة التفاضلية بصيغة المعادلة المميزة كما يلي:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

Let $y = e^{mx}$, $\therefore \dot{y} = me^{mx}$, $\ddot{y} = m^2 e^{mx}$ sub. in above equation

$$a m^2 e^{mx} + b m e^{mx} + c e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(a m^2 + b m + c) = 0$$

$\therefore a m^2 + b m + c = 0$ is called characteristic equation المعادلة المميزة

2. حل المعادلة المميزة بقانون الدستور وبالحالات التالية:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- إذا كانت الكمية تحت الجذر أكبر من الصفر (قيم موجبة) فقيم m ستكون قيم حقيقية وبذلك يكون الحل عبارة عن:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

where:

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- إذا كانت الكمية تحت الجذر تساوي صفر فإن $m_1 = m_2 = m$ وبذلك يكون الطرفين متشابهين فيضرب احدهما ب x فيكون الحل عبارة عن:

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

where:

$$m = \frac{-b}{2a}$$

- عندما تكون الكمية تحت الجذر أصغر من الصفر (كمية سالبة) فقيم m ستكون قيم خيالية وبذلك يكون الحل عبارة عن:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\therefore m_{1,2} = P \pm qi$$

$$y = e^{Px}(A \cos qx + B \sin qx)$$

where:

$$P = \frac{-b}{2a}, \quad q = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Example (2): Find the general solution for following differential equation:

$$1) \quad \ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0$$

$$2) \quad \ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0$$

$$3) \quad \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$$

$$4) \quad \ddot{y} - 4y = 0$$

Solve:

$$1) \quad \ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0$$

$$m^2 + 7m + 12 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left[m_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} = \frac{-7 \pm 1}{2} \right] \rightarrow m_1 = -3, \quad m_2 = -4$$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x}$$

$$2) \quad \ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left[m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1} = \frac{6 + \sqrt{0}}{2} \right] \rightarrow m_1 = m_2 = m = 3$$

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

$$3) \dot{y} + 2y = 0$$

$$m^2 + 2m + 5 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 2i$$

$$= P \pm qi$$

$$\therefore P = -1, \quad q = 2$$

$$\therefore y = e^{Px}(A \cos qx + B \sin qx) = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$4) \dot{y} - 4y = 0$$

$$m^2 - 4 = 0 \rightarrow m^2 = 4$$

$$m_{1,2} = \pm 2$$

or

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \times 1 \times -4}}{2 \times 1} = \pm 2$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

Problems:

H.W: Find the general solution for following differential equation:

$$1) \dot{y} - 3y = 0$$

$$\text{Ans: } y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

$$2) \dot{y} - 5y = 0$$

$$\text{Ans: } y = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x}$$