



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة المستقبل

قسم المحاسبة

المرحلة الثانية

بحوث العمليات

المحاضرة الثالثة

الطريقة البيانية

اعداد

م. م علي يوسف علي المياحي

2025-2024

V- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل البياني:

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، ولكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصوراً عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرتين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة (X_1, X_2) ¹.

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

V-1- خطوات إيجاد الحل الأمثل:

وتتكون عملية الحل بطريقة الحل البياني من عدد من الخطوات التي لابد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي:

✓ تحويل كل مترajحات القيود إلى معادلات، وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم؛

✓ تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد، وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة؛

✓ إذا كانت مترajحات القيود من نوع أصغر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة يجب أن تكون محدودة من اليمين وباتجاه نقطة الأصل وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد رؤوس المضلع الأبعد عن نقطة الأصل؛

✓ إذا كانت مترajحات القيود من نوع أكبر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التدنئة، نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يسار المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة تكون خارج المضلع بدلاً من أن تقع داخله أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محددة من اليمين ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب عن نقطة الأصل؛

✓ إذا كانت مترajحات القيود في المشكلة خليط من $(\leq, \geq)$ معاً، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعها التعظيم والتدنئة، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع؛

¹ . سهيلة عبد الله سعيد: " الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات"، دار الحامد، ط1، الأردن، 2007. ص 38.

- ✓ إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط المضلع بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيم X_1 و X_2 عند كل نقطة؛
- ✓ نجد قيمة (Z) التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط المضلع عن طريق تعويض إحداثيات النقطة رؤوس المضلع في دالة الهدف؛
- ✓ نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي قيمة (Z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف التعظيم (Maximization)، أو النقطة التي قيم (Z) عندها أقل ما يمكن في حالة كانت دالة الهدف تخفيض (Minimization).
- ✓ ويمكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة مباشرة عندما يكون منطقة الحل عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس، وذلك بجعل دالة الهدف معدومة معدومة، أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيمتها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم (Δ) ، نحرك المستقيم (Δ) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمتين، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الاقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Δ) عند سحبه إلى الأعلى بشكل موازي لأصله، وهي نقطة حاصلة من التقاطع عدة مستقيمتين مولدة وعكس في حالة التدنئة¹.

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على نموذج البرمجة الخطية:

مثال رقم (01): أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن للبرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Max(z) = 4x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

الحل: لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمتين وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

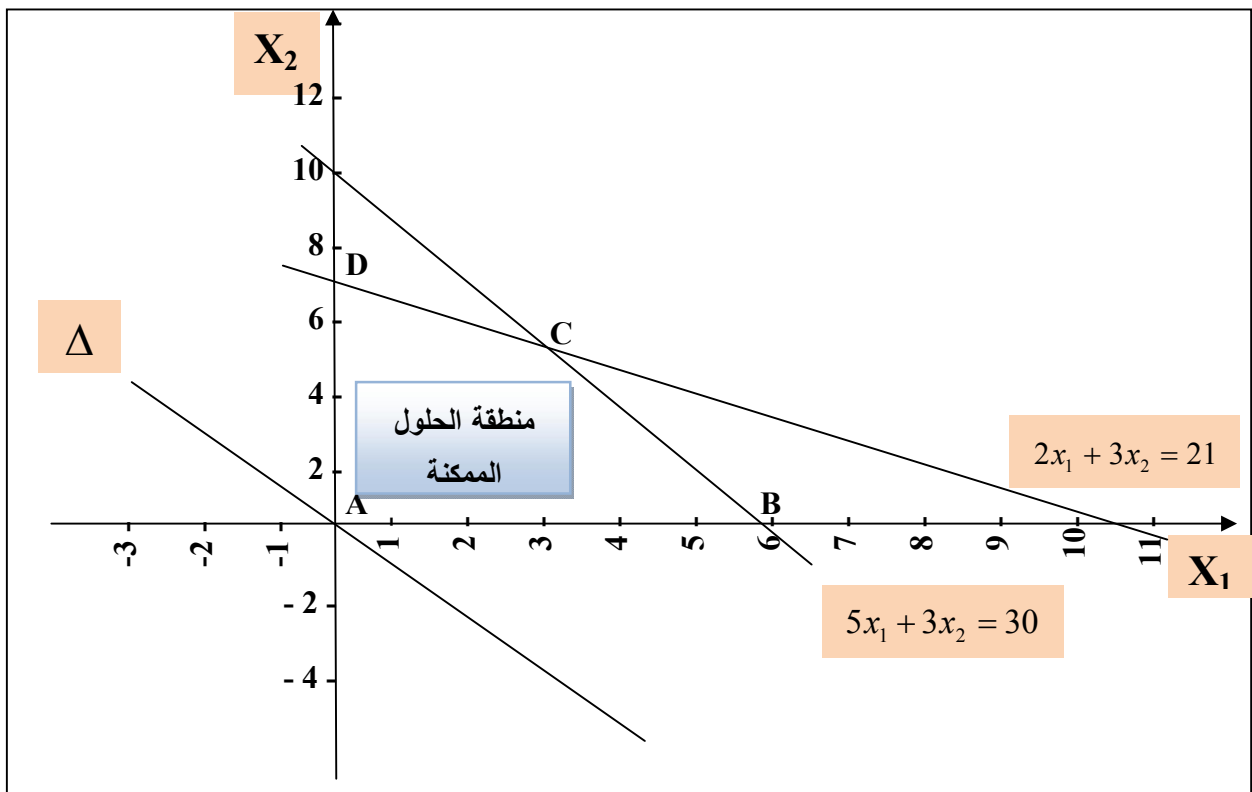
- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمتين، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينهما.

¹ . محمد راتول، مرجع سابق، ص 26.

$5x_1 + 3x_2 = 30$		$2x_1 + 3x_2 = 21$	
x_1	x_2	x_1	x_2
0	10	0	7
6	0	10,5	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: $Z=0$ أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$4x_1 + 3x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	-4
-2,25	3



بعد هذا تحدد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد، وهي كما مبين في الشكل المقابل (A,B,C,D). أي نقطة توجد إلى يمين المستقيمين لا تحقق القيود، كما أن قيد عدم السلبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي على يسار المحور العمودي مرفوضة وبالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود آنيا وتشمل جميع النقاط الموجودة داخل

المنطقة (A,B,C,D) أي المنطقة غير المشطوبة وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.

عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (C) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و(2)، إذ نجد قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة X_1 وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي من النقطة (Δ) فنجد قيمة X_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، وإما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتى المستقيمين حلا مشتركا كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \dots\dots\dots(1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

$$3x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_2 = 5$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الاقتصادية هما: $C : (x_1 = 3, x_2 = 5)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

ال قيد الأول: قيد محقق تماما $5 \times 3 + 3 \times 5 = 30$

ال قيد الثاني: قيد محقق تماما $2 \times 3 + 3 \times 5 = 21$

ومنه لا توجد طاقة غير مستعملة ، ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض

القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z_C = 4x_1 + 3x_2 = 4 \times 3 + 3 \times 5 = 27$$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية، ولا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من

هذه القيمة وتحقق في نفس الوقت جميع القيود، والجدول يوضح ذلك:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A : (x_1 = 0, x_2 = 0)$	$Z_A = 0$
B	$B : (x_1 = 6, x_2 = 0)$	$Z_B = 24$
C	$C : (x_1 = 3, x_2 = 5)$	$Z_C = 27$
D	$D : (x_1 = 0, x_2 = 7)$	$Z_D = 21$

ملاحظة: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضع منطقة الحل الممكن.

مثال رقم (02): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$\text{Min}(z) = 0,75x_1 + 0,85x_2$$

$$s / c$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 100 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 70 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 90 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المترجمات إلى معدلات كما يلي:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$

$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

$$2x_1 + 8x_2 = 90$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

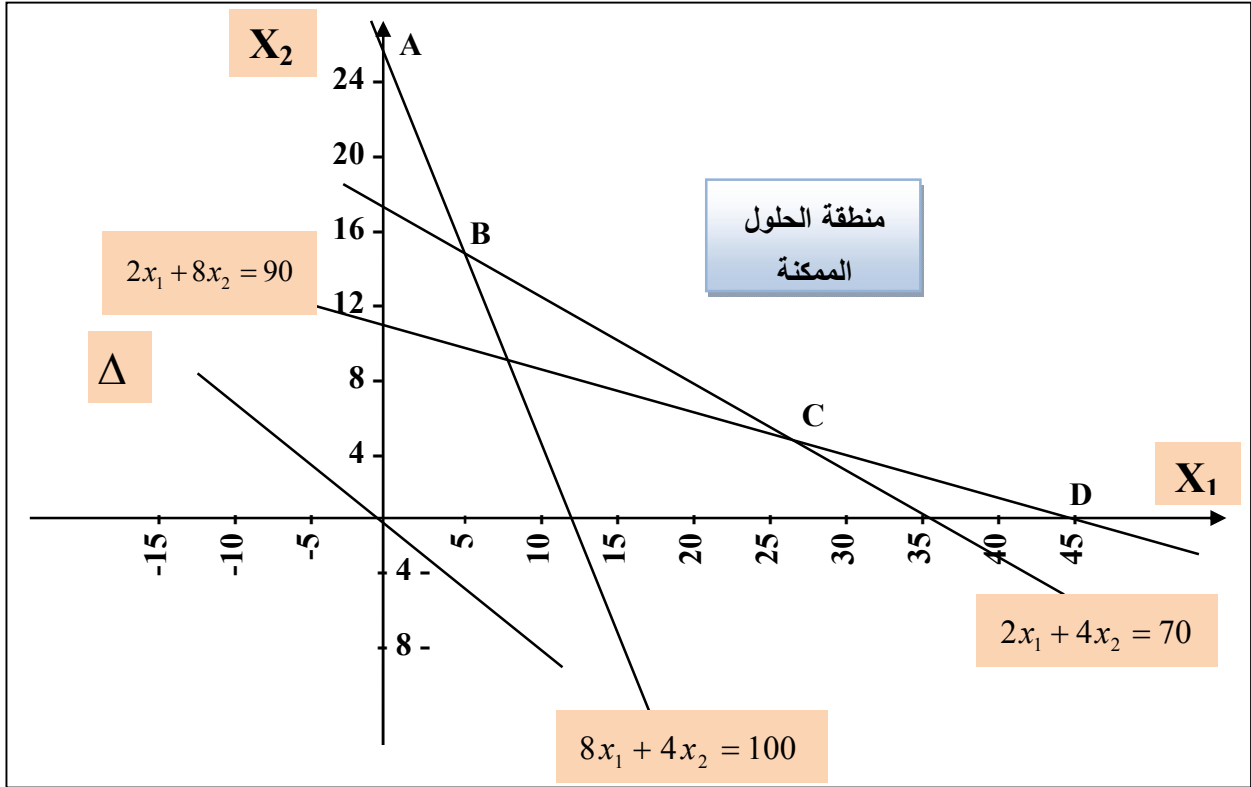
$8x_1 + 4x_2 = 100$	
x_1	x_2
0	25
12,5	0

$2x_1 + 4x_2 = 70$	
x_1	x_2
0	17,5
35	0

$2x_1 + 8x_2 = 90$	
x_1	x_2
0	11,25
45	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: $Z=0$ أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$0,75x_1 + 0,85x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	-2,64
-3,4	3



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل وذلك لأن المتراجحات في هذه المشكلة من النوع أكبر أو يساوي وبالتالي فإن الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة والتي يمكن تحديدها بالنقاط (ABCD).

حيث إحداثيات النقطة A هي: (0 ; 25) والنقطة D هي: (45; 0).
أما النقاط B و C فلا يمكن تحديد إحداثياتهم مباشرة من الرسم الأمر الذي يتطلب استخراجهم من خلال حل المعادلات كما يلي:

النقطة C متولدة من تقاطع مستقيم القيد الثاني والثالث:

$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

$$2x_1 + 8x_2 = 90$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $C : (x_1 = 25, x_2 = 5)$

النقطة B متولدة من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$

$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $B : (x_1 = 5, x_2 = 15)$

وبتعبير قيم إحداثيات الزوايا الأربعة (A,B,C,D) في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي سيتحقق عند النقطة (B) لأنها أقل تكاليف كما يظهر في الجدول التالي:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A : (x_1 = 0, x_2 = 25)$	$Z_A = 21,25$
B	$B : (x_1 = 5, x_2 = 15)$	$Z_B = 16,50$
C	$C : (x_1 = 25, x_2 = 5)$	$Z_C = 23$
D	$D : (x_1 = 45, x_2 = 0)$	$Z_D = 33,75$

ولتأكيد النتيجة عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن النقطة الأولى التي يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (B) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة.

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الاقتصادية هما: $B : (x_1 = 5, x_2 = 15)$ يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

$$8 \times 5 + 4 \times 15 = 100 \text{ قيد محقق تماما}$$

$$2 \times 5 + 4 \times 15 = 70 \text{ قيد محقق تماما}$$

$$2 \times 5 + 8 \times 15 = 130 > 90 \text{ قيد محقق}$$

القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على مايلي:

$$Z_B = 0,75x_1 + 0,85x_2 = 0,75 \times 5 + 0,85 \times 15 = 16,50$$

V-2- حالات خاصة في الحل البياني:

أن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات هي:

■ تعدد الحلول المثلى:

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع التعظيم أو تكون أقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع تدنئة.

مثال رقم (03): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$\text{Max}(z) = x_1 + 2x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المترجمات إلى معدلات كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

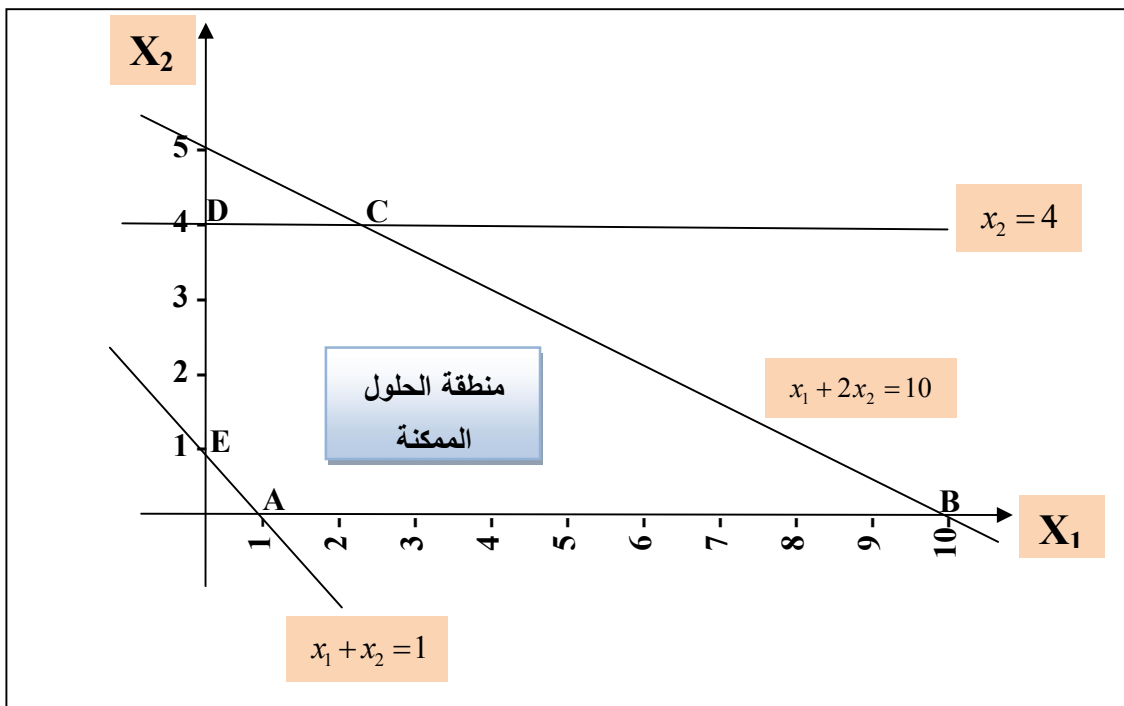
$$x_2 = 4$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

$x_2 = 4$ هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي.

$x_1 + 2x_2 = 10$	
x_1	x_2
0	5
10	0

$x_1 + x_2 = 1$	
x_1	x_2
0	1
1	0



A نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالنقاط (ABCDE)، حيث إحداثيات النقطة هي: (1 ; 0) والنقطة B هي: (10 ; 0) أما النقطة D هي: (0 ; 4) و E هي: (0 ; 1).

أما النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:

$$C : (x_1 = 2, x_2 = 4)$$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الخمس في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي يحقق

لنا أكبر عائد كما يظهر في الجدول التالي:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A : (x_1 = 1, x_2 = 0)$	$Z_A = 1$
B	$B : (x_1 = 10, x_2 = 0)$	$Z_B = 10$
C	$C : (x_1 = 2, x_2 = 4)$	$Z_C = 10$
D	$D : (x_1 = 0, x_2 = 4)$	$Z_D = 8$
E	$E : (x_1 = 0, x_2 = 1)$	$Z_E = 2$

من الجدول نجد أن النقطتين C و B تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 10، يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك الرسم ينطبق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة وهنا يقال أن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

■ عدم وجود حلول:

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولا يوجد هنا حل أساسي ابتدائي مقبول، أي قيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة، بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية¹ وكما يلي:

¹ - Gérald Baillargeon ,op-cit , P 55 .

مثال رقم (04): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$\text{Min}(z) = 20x_1 + 15x_2$$

$$s/c$$

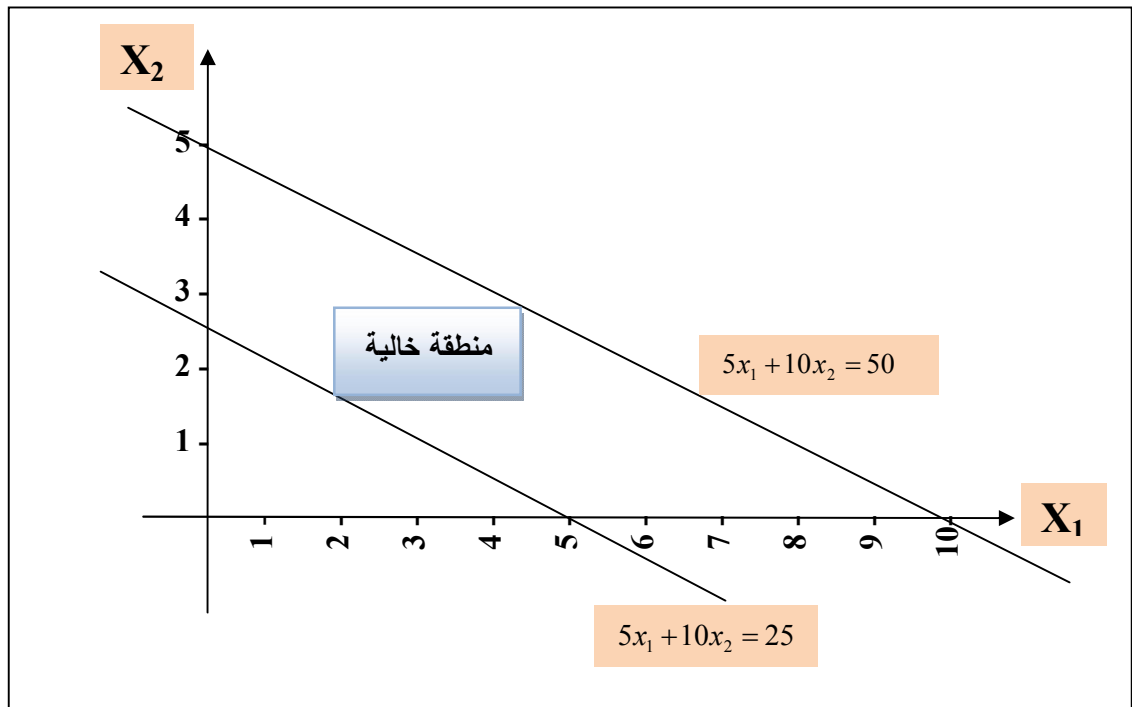
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 50 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

$5x_1 + 10x_2 = 25$	
x_1	x_2
0	2,5
5	0

$5x_1 + 10x_2 = 50$	
x_1	x_2
0	5
10	0



من خلال الشكل نلاحظ أن القيدتين متعاكسان ولا يتقاطعان نهائياً، وبذلك لا نستطيع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

■ منطقة الحل الممكن غير محدودة:

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من القيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة لطريقة الرسم البياني فإن هذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم¹.

ويمكن اعتبار هذه الحالة تقع أيضاً عندما تكون المشكلة بدالة هدف تعظيم ويكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود فتكون هذه الأخيرة أكبر أو تساوي وتعكس الشكل القانوني (القيود أقل أو تساوي).

مثال رقم (05): افترض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية:

$$Max(z) = 3x_1 + 5x_2$$

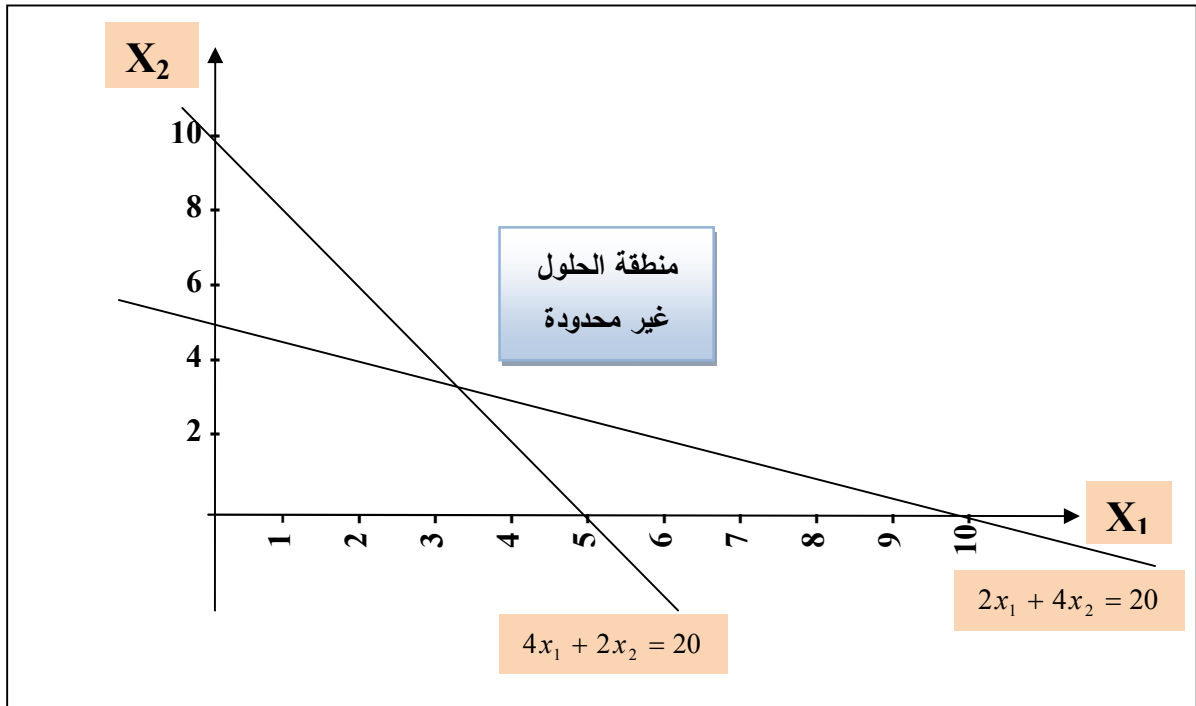
$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



إن منطقة الحل الممكن مفتوحة من النهاية وهي غير محدودة، فأية قيمة في المنطقة تحقق دالة الهدف وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهائية.

¹ . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود المكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 52.

■ حالة حياد أحد القيود:

وهي من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها قيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية.

مثال رقم (06): افترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

$$Max(z) = 5x_1 + 5x_2$$

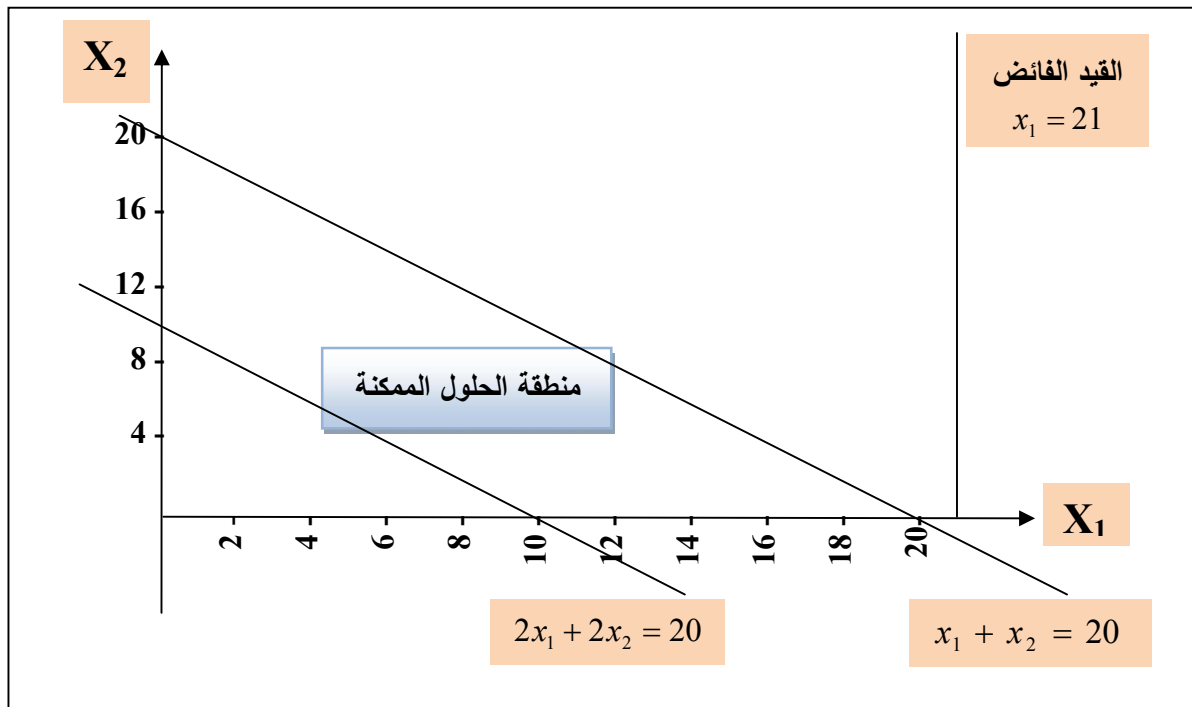
s/c

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ x_1 \leq 21 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

وبوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



نلاحظ من خلال الشكل وجود حالة القيد الفائض متمثلة بالقيد الثالث أبطلا مفعول هذا القيد ذلك أنهما أكثر تقييداً وتحديداً وهما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

V-3- تمارين مقترحة: باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لبرامج الخطية التالية

$2.Min(z) = 80x_1 + 60x_2$ s/c $\begin{cases} 18x_1 + 12x_2 \geq 180 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 162 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 110 \end{cases}$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$	$1.Max(z) = 15x_1 + 12x_2$ s/c $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 54 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ 9x_1 + 9x_2 \leq 90 \end{cases}$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$
$4.Max(z) = 3x_1 + 6x_2$ s/c $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \end{cases}$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$	$3.Max(z) = 2x_1 + 4x_2$ s/c $\begin{cases} x_1 \geq 7 \\ x_2 \leq 11 \end{cases}$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$
$6.Max(z) = x_1 + 2x_2$ s/c $\begin{cases} 1,5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$	$5.Max(z) = 9x_1 + 2x_2$ s/c $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 14 \end{cases}$ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$