وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة المستقبل
قسم المحاسبة
المرحلة الثانية
بحوث العمليات

المحاضرة السابعة

مسائل النقل

اعداد

م. م علي يوسف علي المياحي

2025-2024

المحور الرابع : مسائل النقل

1) تعريف نموذج النقل

2) الصيغة الرياضية لنموذج النقل

3) طرق حل مسائل النقل

مسائل النقل

تعتبر مسائل النقل من المواضيع الهامة في بحوث العمليات، ومن المشاكل الخاصة في البرمجة الخطية، باعتبارها تهدف أيضا إلى الوصول إلى الأمثلة بوجود مجموعة من القيود الخطية. تعتبر مسألة النقل احدى تطبيقات البرمجة الخطية التي تهتم بتوزيع المنتجات من مصادر العرض الى مصادر الطلب بأقل تكلفة ممكنة.

1) تعريف نموذج النقل:

نموذج النقل عبارة عن طريقة لتوزيع أو نقل منتجات أو خدمات من عدة مصادر أو منتجين (مصانع، مخازن...) تمثل الكميات المعروضة إلى عدة مراكز استقبال أو مستهلكين (زبائن) تمثل الكميات المطلوبة بأقل تكاليف ممكنة

- قبل تطبيق نموذج النقل لحل أي مشكلة، يجب التأكد من توفر الشروط التالية:

وجود مجموعة من الطاقات و التي تسمى بالمصادر.

أن يكون هناك استغلال لهذه الطاقات.

يجب أن تتساوى مجموع الطاقات (العرض) مع مجموع المطلوب منها (الطلب).

أن تكون تكلفة أو ربح أو وقت لكل من الطاقات المعروضة بالنسبة لطلب ما.

وجود هدف سواء أعلى ربح(max)أو أدنى تكلفة(min).

تجانس الموارد (نفس وحدة القياس).

2) الصيغة الرياضية لنموذج النقل:

- بافتراض وجود عدد من المصادر الإنتاجية (مراكز التوزيع n)، وعدد من المراكز المستقبلة (مراكز الاستلام m) فإن النموذج الرياضي لمسائل النقل يتكون من مايلي:

1)دالة الهدف: هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن النقل، تكتب وفق الصيغة الرياضية التالية :

$$\text{Min } Z=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}\, X_{ij}$$

2) القيود: تتمثل في قيود العرض و قيود الطلب

1)قيود العرض: تساوي الكميات المعروضة من المراكز مع طاقتها الإنتاجية و تكتب على الشكل التالي:

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = a_i$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + \ldots\ldots\ldots + X_{1n} = a_1 \\ X_{21} + X_{22} + \ldots\ldots\ldots + X_{2n} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{m1} + X_{m2} + \ldots\ldots\ldots + X_{mn} = a_m \end{cases}$$

2)قيود الطلب: و تكتب على الشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + \ldots\ldots\ldots + X_{m1} = b_1 \\ X_{12} + X_{22} + \ldots\ldots\ldots + X_{m2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{1n} + X_{2n} + \ldots\ldots\ldots + X_{mn} = b_m \end{cases}$$

3)شرط عدم السلبية: لا يمكن نقل كميات سالبة و بالتالي تكون موجبة أو تساوي الصفر: $x_{ij} \geq 0$

حيث :

C_{ij}: التكلفة الوحدوية لنقل المنتجات.

X_{ij}:الكمية المعروضة أو الموزعة من المصدر (i) إلى المستهلك (j).

a_i :الكميات المعروضة

b_j : الكميات المطلوبة

3) طرق حل مسائل النقل:

- نموذج النقل يحتوي على (n+m) معادلة و (n×m) متغير, فإن نموذج النقل تتم دراسة معطياته في جدول النقل كما يلي:

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	B_1	B_2	⋯	B_m	كمية العرض
A_1	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	⋯	c_{1m} X_{1m}	a_1
A_2	c_{21} X_{21}	c_{22} X_{22}	⋯	c_{2m} X_{2m}	a_1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_n	c_{n1} X_{n1}	c_{n2} X_{n2}	⋯	c_{nm} X_{nm}	a_n
كمية الطلب	b_1	b_2	⋯	b_m	

- لإيجاد الحل الأمثل لمسألة النقل، هناك مرحلتين أساسيتين:

المرحلة الأولى: إيجاد الحل الابتدائي الممكن، و هناك ثلاثة طرق و هي:

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2- طريقة التكلفة الدنيا

3- طريقة فوجل التقريبية

المرحلة الثانية: مرحلة اختبار و تحسين الحل الابتدائي بطريقتين:

1- طريقة المسار المتعرج.

2- طريقة عوامل الضرب (طريقةModi المعدلة)

أولا :مرحلة إيجاد الحل الأساسي

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية: يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أول خانة في جدول النقل الى الأعلى وهي من أسهل الطرق غير أنها لا تستند على منطق علمي في توزيع الكميات لأنها لاتعتمد على التكاليف في تشغيل الخلايا من العرض الى الطلب و انما تعتمد على موقع الخلايا و تلبية الطلبات فقط.

يبدأ الحل في طريقة الزاوية الشمالية بآتباع الخطوات التالية:

-نبدأ بتوزيع أول خلية في الجدول و هي الخلية الشمالية الغربية و هي الخلية (1-1) على الكمية المطلوبة مع حذف الكمية من العرض.

-ننتقل الى الخلية الموالية في تفس السطر اذا لم نستطيع تلبية كل الطلب, اما اذا تم تلبية الطلب ننتقل للسطر الثاني يعني الخلية (2-2)

-يتم تكرار نفس الخطوات حتى إتمام عملية النقل.

مثال : لدى إحدى الشركات ثلاثة مخازن من مواقع مختلفة، كما أن لها مركزين تسويقين. تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع (بالدينار)وحجم التخزين لكل مخزون و الاحتياجات لكل مركز تسويقي ملخص في الجدول التالي:

الاستلام / التوزيع	B1		B2		**كمية العرض**
A1	4		2		**60**
A2	7		5		**40**
A3	3		10		**70**

170	**65**	**105**	**كمية الطلب**

المطلوب :حل هذه المسألة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

حل المثال : نبدأ بتوزيع الطلب ابتداء من الخلية الواقعة في الركن الشمالي الغربي (الصف و العمود الأول) مع التحقق من شرط كمية العرض = كمية الطلب

الاستلام / التوزيع	B1		B2		**كمية العرض**
A1	**4**	**60**	2	_	~~60~~ 0
A2	**7**	**40**	5	_	~~40~~ 0
A3	**3**	**5**	**10**	**65**	~~65~~ ~~70~~ 0
كمية الطلب	~~105~~ ~~45~~ ~~5~~ 0		~~65~~ 0		170

- نلاحظ أنه تم تلبية جميع طلبيات للمراكز التسويقية ، و بالتالي التكلفة الكلية بطريقة الركن الشمالي الغربي كالتالي:

$$Min\ z = 60(4)+40(7)+5(3)+65(10)$$

$$Min\ z=1185$$

2- طريقة التكلفة الدنيا: تأخذ هذه الطريقة بعين الاعتبار تكلفة النقل من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام، وذلك باختيار الخانة التي تتضمن أقل التكاليف.

- نأخذ نفس المثال السابق ، ونطبق طريقة التكلفة الدنيا و ذلك ببدأ التوزيع من الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة.

الاستلام / التوزيع	B1		B2		كمية العرض
A1	4	-	**2**		~~60~~ 0
				60	
A2	**7**		**5**		~~35~~ ~~40~~
		35		**5**	0
A3	**3**		10		~~70~~ 0
		70		–	
كمية الطلب	~~105~~		~~65~~		170
	~~70~~		~~5~~		
	~~35~~		0		
	0				

من خلال الحل تم التحصل على تكلفة النقل الكلية بطريقة التكلفة الدنيا التالية:

$$Min\ z = 60(2)+35(7)+5(5)+70(3)$$

$$Min\ z = 600$$

3- طريقةVogel فوجل : يطلق عليها أيضا طريقة الجزاء أو العقاب و تعتبر هذه الطريقة قريبة إلى الحل الأمثل من الطريقتين السابقتين. يتم إتباع الخطوات التالية في هذه الطريقة:

-حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف و في كل عمود.

-تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق تكلفة(أعلى عقاب).

- نختار الخلية التي تحمل أقل فرق تكلفة للتوزيع.

ملاحظة : في حالة وجود أقل تكلفتين متساويتين فإننا أيضا نحسب الفرق بينهما و هو الصفر.

- نأخذ نفس المثال السابق، و نطبق طريقة **Vogel**:

الاستلام / التوزيع	B1		B2		كمية العرض	فرق الأسطر
A1	4	_	**2**	**60**	~~60~~ 0	2-4=2
A2	**7**	**35**	**5**	**5**	~~5~~ ~~35~~ ~~40~~ 0	7-5=2
A3	**3**	**70**	10	_	~~70~~ 0	3-10=7
كمية الطلب	~~105~~ ~~35~~ 0		~~65~~ ~~5~~ 0		170 170	
فرق الأعمدة	4-3=1 7-4=3		5-2=3			

من خلال الحل تم التحصل على التكلفة التالية بطريقة فوجل:

Min z =35(7)+60(2)+70(3)+5(5)

Min z=600

نلاحظ ان تكلفة النقل بطريقة التكلفة الدنيا و طريق فوجل أقل من التكاليف بطريقة التكلفة الشمالية الغربية لأن هذه الطريقة لا تأخذ بعين الاعتبار التوزيع عن طريق التكاليف و انما التوزيع لتلبية الطلب فقط, لهذا السبب نمر لمرحلة اختبار و تحسين الحل.

المرحلة الثانية: تحسين الحل الابتدائي: يعتبر الحل بالطرق السابقة حل أولي , لذلك نستعمل طرق المرحلة الأولى للوصول الى الحل الأمثل.

1- طريقة المسار المتعرج: تسمى أيضا بطريقة التخطي و ترتكز هذه الطريقة على تقييم كل مرحلة فارغة في جدول الحل الأولي. لتطبيق هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

أ) التحقق من شرط أن الخلايا المملوءة يجب أن تساوي دائما:

عدد الخلايا المملوءة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة -1.

عدد الخلايا المملوءة =(m+n-1).

ب) رسم المسارات المغلقة للخلايا الفارغة (يبدأ المسار المغلق بعلامة موجبة للخلية المراد تقييمها ثم تليها علامة سالبة و هكذا لجميع الخلايا التي يتشكل منها المسار.

ج) حساب التكلفة الغير المباشرة للخلية المراد تقييمها , وذلك بجمع تكلفة خلايا المسار. (إذا كانت هذه التكلفة سالبة معنى ذلك أن هذه الخلية تساهم في تخفيض التكاليف).

د) يتم استبدال الخلية الفارغة بالخلية المملوءة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.

هـ) نكرر نفس الخطوات السابقة حتى الحصول على الحل الأمثل .

نأخذ نفس المثال السابق، ونطبق طريقة المسار المتعرج كما يلي:

1- حساب عدد الخلايا المملوءة =(m+n-1)= (3+2-1)=4

2- رسم المسارات المغلقة: $X_{12} = +2 - 4 + 3 - 10 = -9$

$$X_{22} = +5 - 7 + 3 - 10 = -9$$

يلاحظ وجود قيمتين سالبتين، نبدأ بالخلية (X_{12}) و عليه تملأ الخلية من خلال الخلايا المناظرة لها بأكبر كمية ممكنة من الوحدات بهدف تقليل التكاليف.

	B_1	B_2
A_1	4 - 60	2 + _
A_2	7 40	5 _
A_3	3 + 5	10 65 -

بعد إجراء عملية التحويل نتحصل على الجدول التالي:

	B_1	B_2
A_1	4 _	2 60
A_2	7 40	5 _
A_3	3 65	10 5

يصبح مجموع التكاليف بعد تحسين الحل كالتالي:

Min z =60(2)+40(7)+5(10)+40(7)+60(2)

Min z=645

تعتبر هذه التكلفة أقل من 1185 دج في الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

- نكرر نفس الخطوات السابقة:

1- نرسم المسار المغلق:

	B_1	B_2
A_1		60
A_2	− 40	+
A_3	+5	5−

$$X_{11} = +4 - 2 + 10 - 3 = +9$$
$$X_{22} = +5 - 10 + 3 - 7 = -9$$

- نلاحظ أن أقل قيمة سالبة هي ل (X_{22}) و بالتالي نقوم بنقل 5 وحدات للخلية المناظرة لها، لنتحصل على الجدول التالي:

	B_1	B_2
A_1	4 _	2 60
A_2	7 35	5 5
A_3	3	10

_	70	

- تصبح التكلفة الكلية كما يلي: ***600= (3)70+(7)35+(5)5+(2)60 دج***

نكرر نفس الخطوات السابقة: $X_{11} = +4 - 2 + 5 - 7 = 0$

$$X_{32} = +10 - -3 + 7 - 5 = +9$$

- نلاحظ أن القيم التي تحصلنا عليها هي $(+9، 0)$ مما يدل على عدم وجود أية قيمة سالبة و بالتالي فإن الحل الأمثل المتوصل اليه هو ***600 دج***.

2- طريقة التوزيع المعدلة (طريقةModi المعدلة):

تعتبر هذه الطريقة أسهل من طريقة المسار المتعرج، إذ لا تتطلب رسم جميع المسارات.

تتلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي:

أ) التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة $=(m+n-1)$.

ب) يتم تكوين معادلة لكل خلية مملوءة في جدول الحل الأول.

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

بحيث: U_i: المتغير الخاص بالصف i

V_j: المتغير الخاص بالعمود j

C_{ij}: تكلفة الخلية التي تقع في الصف i و العمود j .

ج) حساب التكلفة الغير المباشرة للخلايا الفارغة وفقا للمعادلة التالية:

$$(C_{ij})' = C_{ij} - U_i - V_j$$

د) نختار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الأشد سلبية، و يتم دراسة مسارها.

هـ) يعاد تكرار نفس العملية إلى غاية الوصول إلى قيم موجبة أو تساوي الصفر.

* نأخذ نفس المثال السابق و نطبق طريقة التوزيع المعدلة.

	B_1	B_2	
A_1	4	2	60
A_2	7	5	40
A_3	3	10	5
			65

أ) عدد الخلايا المملوءة = m+n-1 =3+2-1=4 و بالتالي يتم تكوين المعادلات الموالية.

ب) تكوين معادلات الخلايا المملوءة: (لتسهيل العمليات نفترض أن أحد المتغيرات =0)

$$①C_{11} = U_1 + V_1 = 4 \Rightarrow U_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 4$$
$$②C_{21} = U_2 + V_1 = 7 \Rightarrow V_1 = 4 \Rightarrow U_2 = 3$$
$$③C_{31} = U_3 + V_1 = 3 \Rightarrow V_1 = 4 \Rightarrow U_3 = -1$$
$$④C_{32} = U_3 + V_2 = 10 \Rightarrow U_3 = -1 \Rightarrow V_2 = 1$$

من المعادلات السابقة نتحصل على الجدول التالي:

V_j / U_i	4	11
0	4	-
3	7	-
1-	3	10

حساب التكاليف الغير المباشرة للخلايا الفارغة:

$$C_{12} = C_{12} - V_2 - U_1 = 2 - 11 - 0 = -9$$
$$C_{22} = C_{22} - V_2 - U_2 = 5 - 11 - 3 = -9$$

- يلاحظ وجود قيمتين سالبين، هذا ما يعني أن الحل غير أمثل ، و بالتالي نستمر في الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل.
- يتم نقل أقل عدد من الوحدات في الخلية السابقة في المسار المغلق ، لتضاف أو تطرح حسب الإشارة.

A_1	4 60	2 _
A_2	7 _	5 40
A_3	3 45	10 25

- نكرر نفس الخطوات السابقة ، نتحصل على معدلات الخلايا المملوءة كما يلي:

$$C_{11} = U_1 + V_1 = 4 \Rightarrow V_1 = 4$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 = 5 \Rightarrow U_2 = -5$$

$$C_{31} = U_3 + V_1 = 4 \Rightarrow U_3 = 0$$

$$C_{32} = U_3 + V_2 = 10 \Rightarrow V_2 = 10$$

- نتحصل على الجدول الموالي:

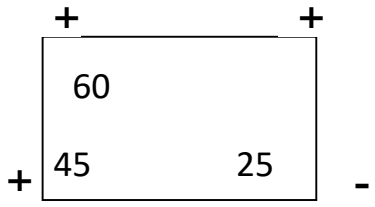
V_j / U_i	4	01
0	4	-
-5	-	5
0	3	10

حساب التكلفة الغير المباشرة للخلايا الفارغة:

$$C_{12} = -8$$

$$C_{21} = +8$$

يلاحظ أن الخلية C_{12} تحمل قيمة سالبة، و عليه يتم اختبار هذه الخلية و تكوين المسار المغلق.



إذن سيتم نقل 25 وحدة بين خلايا المسار المغلق (طرح أو إضافة حسب الإشارة).

	B_1	B_2
A_1	4 35	2 25
A_2	7 _	5 40
A_3	3 70	10 _

التكلفة الكلية =***600= (3)70+(5)40 +(2)25+(4)35 دج***

و هي نفس التكلفة التي تم التوصل إليها في طريقة المسار المتعرج، و التي تمثل الحل الأمثل بعد تحسينه.

تمارين محلولة حول مسائل النقل

تمرين رقم 01:

تمتلك إحدى (A_1 ،A_2،A_3)تحتوي على كميات مختلفة من البضاعة،و المطلوب تسويقها إلى ثلاثة وكلاء المؤسسات التجارية ثلاثة مخازن , الكميات متوفرة في الجدول التالي:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	5	1	8	12
A2	2	4	0	14
A3	3	6	7	4
كمية الطلب	9	10	11	**30**

المطلوب: ما هو مجموع تكاليف النقل للسلع من المصادر إلى المراكز باستخدام:

1) طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟
2) طريقة التكلفة الدنيا؟
3) طريقة Vogel التقريبية؟

حل التمرين رقم 01:

1) **طريقة الزاوية الشمالية الغربية:**

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	5 **9**	1 **3**	8 –	~~12~~ ~~3~~ ~~0~~
A2	2 -	4 **7**	0 **7**	~~14~~ ~~7~~ 0
A3	3 –	6 –	7 **4**	~~4~~ 0
كمية الطلب	~~9~~ 0	~~10~~ ~~7~~ 0	~~11~~ 4 0	30

Min z= 7(4)+7(0)+7(4)+3(1)+9(5)

Min z=104

2) طريقة التكلفة الدنيا:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	5 **2**	1 **10**	8 –	~~12~~ ~~2~~ 0

A2	2	**3**	4	_	0 **11**	~~14~~ ~~3~~ 0
A3	3	**4**	6	-	7 -	~~4~~ 0
كمية الطلب	~~9~~ ~~7~~ ~~4~~ 0		~~10~~ 0		~~11~~ 0	**30**

Min z = 5(2)+1(10)+2(3)+3(4)+0(11)

Min z =38

3- طريقة Vogel التقريبية:

الاستلام / التوزيع	B1		B2		B3		كمية العرض	فرق الصفوف
+	5	**2**	1	**10**	8 _		~~12~~ ~~2~~ 0	5-1=4
A2	2	**3**	4	_	0 **11**		~~14~~ ~~3~~ 0	2-0=2
A3	3	**4**	6	_	7 _		4 0	6-3=3
كمية الطلب	~~9~~		~~10~~ 0		~~11~~ 0		**30**	

	~~6~~ ~~2~~ 0				
فرق الأعمدة	3-2=1 3-2=1 3	4-1=3 _ _	7-0=7 _ _		

$$Min\ z = 5(2)+1(10)+2(3)+3(4)+0(11)$$

$$Min\ z = 38$$

نلاحظ أن تكلفة النقل بطريقة التكلفة الدنيا و طريقة فوجل أقل من تكلفة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

تمرين رقم 02: ليكن لدينا النموذج التالي:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	2	5	4	10
A2	3	7	6	10
A3	1	8	4	10
كمية الطلب	10	15	10	30 35

المطلوب: ما هو مجموع تكاليف النقل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

حل التمرين رقم 02:

1- **تعديل النموذج** : لأن كمية العرض< كمية الطلب ، لذلك نضيف سطر تكاليفه مساوية للصفر.

الحل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	2	5	4	10
A2	3	7	6	10
A3	1	8	4	10
A4	**0**	**0**	**0**	**5**
كمية الطلب	10	15	10	**35** **35**

$$Min\ z = 10(2)+10(7)+8(5)+5(4)+5(0)$$

$$Min\ z = 150$$

تمرين رقم 03: تقوم مؤسسة للتمور بتسويق التمور انطلاقا من ثلاثة موانئ رئيسية الى ثلاثة دول , حيث أن الكميات الممكن تصديرها حسب الموانئ هي:

-ميناء الجزائر: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 80 طن

-ميناء وهران : الكميات الممكن تصديرها عبره هي 40 طن

-ميناء عنابة: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 60 طن

اما كميات الطلب لكل دولة فهي:

-الولايات المتحدة الامريكية : حجم الطلب هو 70 طن

-كندا: حجم الطلب هو 40 طن

-أستراليا: حجم الطلب هو 70 طن

تكلفة نقل القنطار الواحد من التمور بالدولار الأمريكي لكل ميناء الى كل دولة موضحة في الجدول التالي:

	الولايات المتحدة الأمريكية	كندا	استراليا
ميناء الجزائر	5	6	7
ميناء وهران	9	5	11
ميناء عنابة	13	12	8

المطلوب:1- انطلاقا من معطيات مسالة النقل شكل جدول النقل الموافق للمسالة؟

2- أكتب البرنامج الرياضي للمسألة مع العلم أن المؤسسة تهدف لتصدير التمور بأقل تكلفة ممكنة؟

3-أوجد الحل الأساسي المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية و طريقة التكلفة الدنيا و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة لكل طريقة؟

حل التمرين رقم 03:

1-تشكيل جدول النقل الموافق للمسألة:

الاستلام / التوزيع	B1	B2	B3	كمية العرض
A1	5 X_{11}	6 X_{12}	7 X_{13}	80
A2	9 X_{21}	5 X_{22}	11 X_{23}	40
A3	13 X_{31}	12 X_{32}	8 X_{33}	60
كمية الطلب	70	40	70	**180**

2) البرنامج الرياضي لمسألة النقل:

1-دالة الهدف:

$$Min\ z=5x_{11}+6x_{12}+7x_{13}+9x_{21}+5x_{22}+11x_{23}+13x_{31}+12x_{32}+8x_{33}$$

2-القيود:

أ-قيود العرض:

$$\begin{cases} X_{11}+x_{12}+x_{13}=80 \\ X_{21}+x_{22}+x_{23}=40 \\ X_{31}+x_{32}+x_{33}=60 \end{cases}$$

ب-قيود الطلب:

$$\begin{cases} X_{11}+x_{21}+x_{31}=70 \\ X12+x_{22}+x_{32}=40 \\ X_{31}+x_{32}+x_{33}=70 \end{cases}$$

3-شرط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geq 0$$

-إيجاد الحل الأساسي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

الاستلام / التوزيع	B1		B2		B3		كمية العرض
A1	5	**70**	6	10	7	-	~~80~~ ~~10~~ 0
A2	9	–	5	30	11	10	~~40~~ ~~10~~ 0
A3	13		12		8		

		_		-	60	~~60~~ 0
كمية الطلب		~~70~~ 0		~~40~~ ~~30~~ 0	~~70~~ ~~60~~ 0	180

Min z = 70(5)+10(6)+5(30)+10(11)+60(8)

Min z =1150

4-إيجاد الحل الأساس بطريقة التكلفة الدنيا:

الاستلام / التوزيع	B1		B2		B3	كمية العرض
A1	5	70	6	-	7 10	~~80~~ ~~10~~ ~~0~~
A2	9	_	5	**40**	11 -	~~40~~ 0
A3	13	-	12	_	8 60	~~60~~ 0
كمية الطلب		~~70~~ 0		~~40~~ 0	~~70~~ ~~60~~ 0	180

Min z = 70(5)+10(7)+40(5)+ 60(8)