وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة المستقبل
قسم المحاسبة
المرحلة الثانية
بحوث العمليات

المحاضرة السادسة

النموذج المقابل

اعداد

م. م علي يوسف علي المياحي

2025-2024

النموذج المقابل

لكل نموذج خطي أصلي (primal) ،برنامج ثنائي يطلق عليه النموذج المقابل (Dual).

- يستعمل النموذج المقابل لتسهيل إيجاد الحل الأمثل عندما يصعب حل النموذج الأصلي.

1)تحويل النموذج الأصلي الى النموذج المقابل (الثنائي):

- لإيجاد النموذج المقابل نتبع الخطوات التالية:

1- نحول دالة الهدف منmax في النموذج الأصلي إلى min في النموذج المقابل، و العكس صحيح.

2- عمود الثوابت في البرنامج الأصلي يتحول إلى متغيرات دالة الهدف في البرنامج المقابل.

3- تحويل اتجاه المتراجحات في النموذج المقابل.

4- تتغير متغيرات البرنامج الأولي إلى $y_1, y_2 \dots \dots \dots y_n$ في النموذج المقابل.

في كلا النموذجين (أصلي أو المقابل) فإن المتغيرات غير سالبة.

إذا كان البرنامج الأصلي في شكل صيغته القانونية التالية:

$$\max[z] = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \end{cases}$$

$$x_1 \ ،x_2 \ ،x_3 \geq 0$$

فإن برنامجه الثنائي هو:

$$\min[z] = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \geq C_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq C_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \geq C_3 \end{cases}$$

$$y_1 \ ،y_2 \geq 0$$

يمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

	المسألة الاصلية	المسألة الثنائية
المتغيرات	X_i	Y_i
	عدد المتغيرات	عدد القيود
دالة الهدف	Max	Min
	Min	Max
	معاملات دالة الهدف	الطرف الأيمن للقيود bj
القيود	مصفوفة معاملات القيود	منقول مصفوفة معاملات القيود
	الطرف الأيمن للقيود b_j	معاملات دالة الهدفcj
	$\leq$	$\geq$
	$\geq$	$\leq$

مثال رقم 01:

ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\min[Z] = 2x_1 \quad + 4x_2$$

$$s/c \begin{cases} 15x_1 & + 5x_2 & \geq 50 \\ 25x_1 & + 6x_2 & \geq 75 \\ 60x_1 & + 7x_2 & \geq 80 \end{cases}$$

$$x_1 \ ، x_2 \quad \geq 0$$

المطلوب: تحويل النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل؟

حل المثال 01:

$$\max[Z] = 50y_1 \quad + 75y_2 \quad + 80y_3$$

$$s/c\begin{cases}15y_1 \quad + 25y_2 \quad + 60y_3 \quad \leq 2 \\ \quad 5y_1 \quad + 6y_2 \quad + 7y_3 \quad \leq 4\end{cases}$$

$$y_1 \quad ‘y_2 \quad ‘y_3 \quad \geq 0$$

مثال رقم 02: ليكن لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\max[Z] = x_1 \quad + x_2 \quad - x_3$$

$$s/c\begin{cases}3x_1 \quad - 2x_2 \quad + x_3 \quad \leq 50 \\ \quad 5x_1 \quad + 6x_2 \quad \leq 20 \\ \quad -x_1 \quad + x_2 \quad \leq 8\end{cases}$$

$$x_1 \quad ،x_2 \quad ،x_3 \quad \geq 0$$

المطلوب :تحويل النموذج الأولي الى النموذج المقابل؟

حل المثال رقم 02:

$$\min[Z] = 18y_1 \quad + 20y_2 \quad - 8y_3$$

$$s/c\begin{cases}3y_1 \quad + 5y_2 \quad - y_3 \quad \geq 1 \\ -2y_1 \quad + 6y_2 \quad + y_3 \quad \geq 1 \\ y_1 \quad \geq -1\end{cases}$$

$$y_1 \quad ‘y_2 \quad ‘y_3 \quad \geq 0$$

مثال رقم 03: لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\max[Z] = x_1 \quad + x_2 \quad - x_3 \quad - 2x_4$$

$$s/c\begin{cases}3x_1 \quad - 2x_2 \quad + x_3 \quad + 5x_4 \quad \leq 10 \\ 5x_1 \quad + 6x_3 \quad \leq 20 \\ -x_1 \quad + x_2 \quad + 4x_3 \quad \geq 9\end{cases}$$

$$x_1 \quad ‘x_2 \quad ‘x_3 \quad ‘x_4 \quad \geq 0$$

المطلوب : النموذج المقابل ؟

حل المثال رقم03: نلاحظ أن القيد الثالث من نوع أكبر أو يساوي و الدالة من الشكل(max) ، لذلك

نحول القيد إلى أصغر أو يساوي كما يلي:

$$x_1 - x_2 - 4x_3 \le -9$$

النموذج المقابل:

$$\min[z] = 10y_1 + 20y_2 - 9y_3$$

$$s/c\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 1 \\ -2y_1 - y_3 \ge 1 \\ y_1 + y_2 - 4y_3 \ge -1 \\ 5y_1 \ge -2 \end{cases}$$

$$y_1 \text{ ،} y_2 \text{ ،} y_3 \ge 0$$

مثال رقم 04: ليكن النموذج الأصلي التالي:

$$\max[Z] = 3x_1 - 5x_2$$

$$s/c\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \text{ ،} x_2 \ge 0$$

المطلوب :النموذج المقابل؟

حل المثال رقم 04:

- القيد هو عبارة عن معادلة ،و بالتالي يحول على النحو التالي:

$$x_1 + 2x_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ -x_1 - 2x_2 \le -8 \end{cases}$$

النموذج المقابل :

$$\min[Z] = 8y_1 \ -8y_2 \ +4y_3$$

$$s/c \begin{cases} y_1 \ -y_2 \ +y_3 \ \geq 3 \\ 2y_1 \ -2y_2 \ -y_3 \ \geq -5 \end{cases}$$

$$y_1 \ ،y_2 \ ،y_3 \ \geq 0$$

2) إيجاد حل البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس للبرنامج الثنائي (المقابل)

يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج الأولي من خلال حل النموذج المقابل بالطريقة المبسطة , أو الطريقة البيانية.

مثال: ليمن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\min[Z] = 500x_1 \ +100x_2 \ +150x_3$$

$$s/c \begin{cases} x_1 \ +x_2 \ +2x_3 \ \geq 40 \\ x_1 \ +2x_2 \ +2x_3 \ \geq 10 \\ x_1 \ +x_2 \ \geq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \ ،x_2 \ ،x_3 \ \geq 0$$

المطلوب: 1-أكتب النموذج المقابل و أوجد حله الأمثل؟

2-من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل , استنتج الحل الأمثل للنموذج الأصلي؟

الحل:

1-كتابة النموذج المقابل:

$$\max[Z] = 40y_1 \ +10y_2 \ +30y_3$$

$$\begin{cases} y_1 \quad + y_2 \quad + y_3 \quad \leq 500 \\ y_1 \quad + 2y_2 \quad + y_3 \quad \leq 100 \end{cases}$$

$$y_1 \quad + 2y_2 \quad + y_3 \quad \leq 100$$

$$y_1 \ \text{،}y_2 \ \text{،}y_3 \quad \geq 0$$

2–حل النموذج بطريقة السمبلكس:

$$\max[Z] = 40y_1 \quad + 10y_2 \quad + 30y_3 \quad + 0x_1 \quad + 0x_2 \quad + 0x_3$$

$$\begin{cases} y_1 \quad + y_2 \quad + y_3 \quad + x1 \leq 500 \\ y_1 \quad + 2y_2 \quad + y_3 \quad + x_2 \quad \leq 100 \end{cases}$$

$$y_1 \quad + 2y_2 \quad + y_3 \quad + x_3 \quad \leq 100$$

$$y_1 \ ,y_2 \ ,y_3 \ ,x_1 \ \text{،}x_2 \ \text{،}x_3 \quad \geq 0$$

–جدول السمبلكس:

	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3	b_i	ɵ
X_1	1	1	1	1	0	0	500	500
X_2	1	2	1	0	1	0	100	100
X_3	**2**	2	0	0	0	1	150	75
Z_i	40	10	30	0	0	0	0	
X_1	0	0	1	1	0	½	425	425
X_2	0	1	**1**	0	1	-1/2	25	25
Y_1	1	1	0	0	0	½	75	0
Z_i	0	-30	30	0	0	-20	-3000	
X_1	0	-1	0	1	-1	1	400	
Y_3	0	1	1	0	1	-1/2	25	
Y_1	1	1	0	0	0	½	75	

Z_i	0	-60	0	0	-30	-5	-3750	

من خلال جدول السمبلكس تحصلنا على الحل الأمثل للنموذج المقابل لان كل قيم دالة الهدف سالبة أو تساوي الصفر .

3–استنتاج حل النموذج الأصلي من جدول السمبلكس: تمثل الخانات التي باللون الأزرق الحل الأمثل للنموذج الأصلي.

النموذج الأصلي و المقابل لهم نفس دالة الهدف=3750 ون

النموذج المقابل	النموذج الأصلي
$\max[Z] = 40y_1 + 10y_2 + 30y_3$ $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \le 500 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \le 100 \end{cases}$ $y_1 + 2y_2 + y_3 \le 100$ $y_1 ،y_2 ،y_3 \ge 0$	$\min[Z] = 500x_1 + 100 + 150x_3$ $s/c \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 40 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 10 \\ x_1 + x_2 \ge 30 \end{cases}$ $x_1 ،x_2 ،x_3 \ge 0$
الحل الأمثل $y_1 = 75$ ، $y_2 = 0$ $y_3 = 25$ $\mathbf{Z^* = 3750}$	**الحل الأمثل** $x_1 = 0$ ،$x_2 = 30$ $x_3 = 5$ $\mathbf{Z^* = 3750}$

تمارين حول النموذج المقابل

تمرين رقم 01:

مؤسسة إنتاج تنتج منتوجين A وB ، باستعمال مادتين أوليتين (1) و(2) .

- يحتاج المنتوج (A): 20 وحدة من المادة الأولية (1) و 15 وحدة من المادة الأولية (2).
- يحتاج المنتوج (B): 30 وحدة من المادة الأولية (1) و 20 وحدة من المادة الأولية (2).
- مخزون المادة الأولية (1) و (2) على التوالي: 60 وحدة و 100 وحدة.
- الربح المحقق من المنتوج (A): 6 دج و المنتوج (B): 9 دج.

المطلوب:

1. نموذج البرمجة الخطية؟
2. النموذج المقابل؟

حل التمرين رقم 01:

1/ نموذج البرمجة الخطية:

أ) الترميز: x_1: الكمية المنتجة من A

x_2: الكمية المنتجة من B

ب) دالة الهدف: $\max[Z] = 6x_1 + 9x_2$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 60 \\ 15x_1 + 20x_2 \leq 100 \end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية: $x_1 \quad x_2 \geq 0$

2/ النموذج المقابل:

أ) الترميز: y_1: سعر المادة (1)

y_2: سعر المادة (2)

ب) دالة الهدف: $\min[Z] = 600y_1 + 100y_2$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases}20y_1 + 15y_2 \geq 6\\ 30y_1 + 20x_2 \geq 9\end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية: $y_1 \;\; y_2 \geq 0$

تمرين رقم 02:

تريد مؤسسة صناعة منتوج مركب من 30% من الحديد، 30% من الصلب،40% من الرصاص على الأقل.

- الجدول التالي يوضح التركيبة بالنسبة المئوية من الموارد و ثمنها:

الموارد	A	B	C	D	E
الحديد	%10	%10	%40	%60	%30
الصلب	%10	%30	%50	%30	%30
الرصاص	%80	%60	%10	%10	%40
سعر الموارد (دج)	4.1 دج	4.3 دج	5.8 دج	6 دج	7.6 دج

المطلوب :

1. صياغة النموذج الرياضي الذي يسمح بالمزج بين الموارد بأقل تكلفة ممكنة؟

2. أوجد النموذج المقابل لهذه المسألة؟

حل التمرين رقم 02:

1. النموذج الرياضي (الأصلي):

أ) الترميز: x_1: كمية المورد A

x_2: كمية المورد B

x_3: كمية المورد C

x_4: كمية المورد D

x_5: كمية المورد E

ب-دالة الهدف:

$$\min[Z] = 4.1x_1 + 4.3x_1 + 5.8x_3 + 6x_4 + 7.6x_5$$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases} 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + 0.6x_4 + 0.3x_5 \geq 0.3 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 0.3x_5 \geq 0.3 \\ 0.8x_1 + 0.6x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 + 0.4x_5 \geq 0.4 \end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية:

$$x_1 ،x_2 ،x_3 ،x_4 ،x_5 \geq 0$$

النموذج المقابل:

أ) الترميز: y_1: كمية الحديد المراد بيعها.

y_2: كمية الصلب المراد بيعها.

y_3: كمية الرصاص المراد بيعها.

ب)دالة الهدف:

$$\max[Z] = 0.3y_1 + 0.3y_2 + 0.4y_3$$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases} 0.1y_1 + 0.1y_2 + 0.8y_3 \leq 4.1 \\ 0.1y_1 + 0.3y_2 + 0.6y_3 \leq 4.3 \\ 0.4y_1 + 0.5y_2 + 0.1y_3 \leq 5.8 \\ 0.6y_1 + 0.1y_2 + 0.8y_3 \leq 6 \\ 0.3y_1 + 0.3y_2 + 0.4y_3 \leq 7.6 \end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية :

$$y_1 ، y_2 ، y_3 \geq 0$$

تمرين رقم 03: لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$\min[Z] = 3x_1 + 7x_2 - 5x_3$$

$$s/c\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 ، x_2 ، x_3 \geq 0$$

المطلوب: النموذج المقابل؟

حل التمرين رقم 03:

تحويل القيد الثاني:

$$-2x_1 - 3x_2 \geq -2$$

النموذج المقابل:

$$\max[Z] = 4y_1 - 2y_2$$

$$s/c\begin{cases} y_1 \quad -2y_2 \quad \leq 3 \\ 5y_1 \quad -3y_2 \quad \leq 7 \\ y_1 \quad \leq -5 \end{cases}$$

$$y_1 \ ، y_2 \quad \geq 0$$

تمرين رقم 04: مصنع لإنتاج الأثاث، ينتج نوعين من المنتوجات: طاولات و كراسي.

- يمر المنتوجين بورشتي إنتاج: ورشة القص ، وورشة التركيب.

- تستغرق الطاولات 2 سا في ورشة القص و 4سا في ورشة التركيب.
- تستغرق الكراسي 1سا في ورشة القص و 0.5 سا في ورشة التركيب.
- طاقة ورشة القص لا تقل عن 10 ساعات.
- طاقة ورشة التركيب لا تتجاوز 9 ساعات.

المطلوب:

1. نموذج البرمجة الخطية بحيث أن الربح الوحدي للطاولات 5 دج، والربح الوحدي للكراسي 4 دج؟
2. النموذج المقابل لهذه المسألة ؟

حل التمرين رقم 04:

1-نموذج البرمجة الخطية:

أ) الترميز: x_1: الكمية المنتجة من الطاولات

x_2: الكمية المنتجة من الكراسي

ب) دالة الهدف:

$$\max[Z] = 5x_1 \quad + 4x_2$$

ج) القيود:

$$s/c\begin{cases}2x_1 + x_2 \leq 10\\4x_1 + 0.5x_2 \leq 9\end{cases}$$

د) شرط عدم السلبية: $x_1 ، x_2 \geq 0$

- –النموذج المقابل :

$$\min[Z] = 10y_1 + 9y_2$$

$$s/c\begin{cases}2y_1 + 4y_2 \geq 5\\y_1 + 0.5y_2 \geq 4\end{cases}$$

$$y_1 ، y_2 \geq 0$$