Determinants and Matrices

1. Definition of Determinant تعريف المحدد

المحدد: هو دالة معينة لها مقدار محدد لا يتبدل يتكون من مجموعة من العناصر المرتبة في n من الصفوف و n من الاعمدة وبذلك يجب ان يكون المحدد مربع. (عدد الصفوف = عدد الاعمدة)

The general form of determinant:

$$[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1j} & \dots\dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots\dots & a_{ij} & \dots\dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nj} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

حيث:

i: رقم السطر

j: رقم العمود

كيفية استخراج قيمة المحدد:

1. إذا كان المحدد من الدرجة الثانية (Second Order Determinant)

$$|A|_{2\times2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|A| = (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$

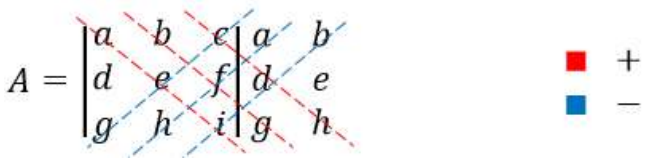
For Example: $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$.

$$|A| = (2 \times 5) - (3 \times 4) = -2$$

2. إذا كان المحدد من الدرجة الثالثة (Third Order Determinant)

الطريقة الأولى:

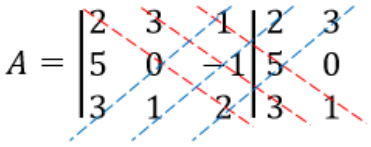
$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i}\end{vmatrix}$$



$$A=(a*e*g)+(b*f*g)+(c*d*h)-(c*e*g)-(a*f*h)$$
$$-(b*d*i)$$

Example (1): Find value of determinant $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1}\\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2}\end{vmatrix}$**.**

Solve:



$$A=(2\times0\times2)+(3\times-1\times3)+(1\times5\times1)-(1\times0\times3)-(2\times-1\times1)$$
$$-(3\times5\times2)$$
$$A=-32$$

الطريقة الثانية:

a. نقوم بتثبيت أي سطر او أي عمود ويفضل الذي يحتوي على أكبر عدد من الرقم (0).

b. نأخذ ارقام ذلك السطر او العمود المثبت بالتسلسل ونحذف عموده وسطره ويضرب في المصفوفة المتبقية. يراعى في ذلك إشارة الرقم بالاعتماد على موقعه، حيث يتم تحديد إشارة الموقع من $(-1)^{i+j}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\times\boldsymbol{a}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e} & \boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times\boldsymbol{b}\begin{vmatrix}\boldsymbol{d} & \boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{i}\end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{1+3}\times\boldsymbol{c}\begin{vmatrix}\boldsymbol{d} & \boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h}\end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Example (2): Find value of determinant $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Solve:

في هذا المثال يمكن تثبيت السطر الثاني او العمود الثاني لانهما يحتويان على (0). وسوف نثبت السطر الثاني.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \times 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times -1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -5(3 \times 2 - 1 \times 1) + 0 + 1(2 \times 1 - 3 \times 3) = -32$$

3. إذا كان المحدد من الدرجة الرابعة (Forth Order Determinant)

لإيجاد قيمة المحدد من الدرجة الرابعة سوف نستخدم الطريقة الثانية للمحدد من الدرجة الثالثة.

Example (3): if $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ **Find value of determinant** A.

Solve:

في هذا المثال يمكن تثبيت العمود الاول لانه يحتوي على اكثر عدد من (0).

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 2\begin{vmatrix} 5 & 9 & -12 \\ 2 & 6 & -1 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \times -3\begin{vmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 5 & 9 & -12 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 & -12 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 1 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 345$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & 6 & 0 & -4 \\ 5 & 9 & -12 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 148$$

$$A = 2 \times 234 + 3 \times 148 = 1134$$

Maryam Hameed Nasir Al-Mamoori