3. Solution of Simultaneous Linear Equations by Determinants

حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات

- **حل المعادلات الخطية بمجهولين هما ال(x, y):**

لاشتقاق المعادلات نفرض المعادلتين كالتالي:

$$a_{11}\, x + a_{12}\, y = b_1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$a_{21}\, x + a_{22}\, y = b_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

للحصول على قيمة (x) نضرب المعادلة رقم (1) بالمعامل (a_{22}) ونضرب المعادلة (2) بالمعامل (a_{12}) وكالاتي:

$$a_{11}\, a_{22}\, x + a_{12}\, a_{22}\, y = b_1\, a_{22} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

$$a_{21}\, a_{12}\, x + a_{22}\, a_{12}\, y = b_2\, a_{12} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

بطرح المعادلة (4) من المعادلة (3) سوف نحصل على قيمة (x):

$$x = \frac{b_1\, a_{22} - b_2\, a_{12}}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}}$$

وبنفس الطريقة نجد قيمة (y):

$$y = \frac{b_1\, a_{11} - b_2\, a_{21}}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}}$$

لاجل كتابة هاتين المعادلتين بصيغة يمكن حفضهما بسهولة نلاحظ ان المقامات متساوية ويمكن الحصول عليهما بكتابة معاملات ال(x, y) في المعادلات الاصلية (1), (2) بصيغة محدد من الدرجة الثانية وكالاتي:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

للحصول على قيمة المحدد (Δx) نرفع معاملات ال x ونضع بدلا عنها قيم الحد المطلق وبنفس الطريقة للحصول على المحدد (Δy) نرفع معاملات ال y ونعوض بدلا عنهم قيم الحد المطلق.

where: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Example: Find x and y for equation below:

$6x - 8y = 4$

$x + 2y = -6$

Solve:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2 - (-8) \times 1 = 20$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - (-8 \times -6) = -40$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 6 \times -6 - 4 \times 1 = -40$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-40}{20} = -2 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-40}{20} = -2$$

ملاحظة: للتأكد من الحل نعوض قيم ال(x, y) في احدى المعادلات يجب ان يساوي الطرف الايسر الطرف الأيمن.

- **حل المعادلات الخطية بثلاثة مجاهيل هما ال(x, y, z):**

نفرض المعادلات كالتالي:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

where: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, Δy

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Example: Find x, y and z for equation below:

$2x - 3y + 4z = 29$

$x - 2y + 3z = 8$

$3x + 2y - 4z = -4$

Solve:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 75$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 29 & -1 & 4 \\ 8 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 29 & -1 \\ 8 & -2 \\ -4 & 2 \end{matrix} = 150$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 29 & 4 \\ 1 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 29 \\ 1 & 8 \\ 3 & -4 \end{matrix} = 225$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 29 \\ 1 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 300$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{150}{75} = 2 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{225}{75} = 3 \quad , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{300}{75} = 4$$

H.W: Find x, y and z for equation below:

$3x - 2y + 5\,z = 7$

$2x + y - z = -6$

$4x - 3\,y + 2z = -5$