Integration of Logarithm & Exponential Fns

تكامل الدوال اللوغارتمية والاسية

① $\int \log_a u \, du = \dfrac{u \cdot \log_a\left(\frac{u}{e}\right)}{u'} + C$ (u = linear Function)

Ex ① $\int \log_4 x \, dx$

Sol.)

$u = x \longrightarrow u' = 1$

$a = 4$

$\therefore \int \log_4 x \, dx = \dfrac{x \log_4\left(\frac{x}{e}\right)}{1} + c = \boxed{x \log_4\left(\frac{x}{e}\right) + c}$

Ex ② $\int \log_5 (x+7) \, dx$

Sol.)

$u = x+7 \Longrightarrow u' = 1$

$a = 5$

$\therefore \int \log_5 (x+7) \, dx = \dfrac{(x+7) \log_5\left(\frac{x+7}{e}\right)}{1} + c = \boxed{(x+7) \log_5\left(\frac{x+7}{e}\right) + c}$

Ex ③ $\int \log_7 x^4 \, dx$

Sol.)

In such a problem, we need to manipulate the log before going ahead with using the formula ①

$\int \log_7 x^4 \, dx = 4 \int \log_7 x \, dx \Longrightarrow (u = x \rightarrow u' = 1,\ a = 7)$

$= \dfrac{4 \cdot x \log_7\left(\frac{x}{e}\right)}{1} + c$

$= \boxed{4x \log_7\left(\frac{x}{e}\right) + c}$

Email (hussein.kadhim@uomus.edu.iq)

Ex) $\int \log_2(x^2+8x+16)\,dx$

Sol.)

$$\int \log_2(x^2+8x+16)\,dx = \int \log_2 (x+4)^2\,dx$$

$$= 2\int \log_2(x+4)\,dx \qquad , \quad u = x+4 \Rightarrow u' = 1$$

$$a = 2$$

$$= \boxed{2(x+4)\log_2\left(\frac{x+4}{e}\right) + c}$$

② $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

③ $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

Examples

① $\int \frac{7}{x}\,dx = 7\int \frac{1}{x}\,dx = \boxed{7\ln x + c}$

② $\int \frac{1}{x+5}\,dx = \boxed{\ln(x+5) + c}$

③ $\int \frac{5}{6-2x}\,dx = \int \frac{5}{6-2x} * \frac{-2}{-2} = \frac{-1}{2}\int \frac{5(-2)}{6-2x}\,dx$

$$= \boxed{\frac{-5}{2}\ln(6-2x) + c}$$

④ $\int \frac{x}{x^2-3}\,dx = \int \frac{x\,dx}{x^2-3} * \frac{2}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-3}\,dx$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2-3) + c}$$

⑤ $\int e^{2x}\,dx = \int e^{2x}\,dx * \frac{2}{2} = \frac{1}{2}\int e^{2x} * 2\,dx$

$$= \boxed{\frac{1}{2} e^{2x} + c}$$

⑥ $\int e^{-5x}\,dx = \boxed{\frac{-1}{5} e^{-5x} + c}$

Integrals of Hyperbolic Function تكامل الدوال الزائدية

تكامل الدوال الزائدية هي تماماً عكس اشتقاق هذه الدوال
مع الاخذ بنظر الاعتبار مشتقة القيمة الموجودة تحت الدالة الزائدية

① $\int \sinh ax \, dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$

② $\int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} \sinh ax + C$

③ $\int \operatorname{sech}^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tanh ax + C$

④ $\int \operatorname{sech} ax \tanh ax \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech} ax + C$

⑤ $\int \operatorname{cosech} ax \coth ax = -\frac{1}{a} \operatorname{cosech} ax + C$

⑥ $\int \operatorname{cosech}^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \coth ax + C$

Examples/

① $\int \cosh(2x) \, dx = \frac{1}{2} \sinh(2x) + C$

② $\int \sinh(2x+5) \, dx = \frac{1}{2} \cosh(2x+5) + C$

③ $\int \coth x \, dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x} \, dx = \boxed{\ln|\sinh x| + C}$

④ $\int \operatorname{sech}^3 x \tanh x \, dx = \int \operatorname{sech}^2 x \operatorname{sech} x \tanh x \, dx$

هنا لدينا طريقتين لحل هذا السؤال

① يمكن استخدام قاعدة السلسلة باعتبار $(\operatorname{sech}^2 x)$ دالة مرفوعة لأس
وهنا يجب تعويض الاشارة السالبة لمشتقة الدالة $(\operatorname{sech} x)$ فيكون الحل
هو كالآتي

$\int \operatorname{sech}^2 x \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = \boxed{-\frac{1}{3} \operatorname{sech}^3 + C}$ Ans

② اما الطريقة الثانية فهو باستخدام التعويض ① $u = \operatorname{sech} x$

Email (hussein.kadhim@uomus.edu.iq)

$du = -\operatorname{sech} x \tanh x \, dx$ ~ (2)

substitute eq.s (1) & (2) into the main eq.

$$\int \underbrace{\operatorname{sech}^2 x}_{u^2} \underbrace{\operatorname{sech} x \tanh x \, dx}_{-du} = \int u^2 \times (-du)$$

$$= -\int u^2 . du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + C$$

Now back substitute on u, yields;

$$= \boxed{-\frac{1}{3} \operatorname{sech}^3 x + C} \quad \underline{Ans}$$

Email (hussein.kadhim@uomus.edu.iq)