## الفصل السابع

# النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية

يناقش هذا الفصل بالأمثلة التوضيحية تقنية النموذج الثنائي وكيفية استخدامها في تحوير البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائي. ويتناول الفصل العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي، والأهمية لهذه العلاقة، بالإضافة إلى مناقشة طرق حسابهما، وطريقة حل المسائل الثنائية بواسطة السمبلكس. كما يسلط الفصل الضوء على تحليل الحساسية من خلال الأمثلة والتمارين التطبيقية.

# الفصل السابع

# 7

## النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية

## Duality in Linear Programming

### 7.1 مقدمة:

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية الثنائية (Duality) والتي تعرف بتحوير نموذج البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائية. ويختص النموذج الثنائي بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات وإتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته وحله، وتُستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية (Sensitivity Analysis).

ويُعرف النموذج الثنائي أيضاً بأنه النموذج المماثل للنموذج الأولي لصياغة مسائل البرمجة الخطية. ويرمز النموذج الثنائي الكثير من المعلومات التي يمكن أن تفيد إدارة العمليات الصناعية في سهولة اتخاذ القرارات، بالإضافة إلى تقليل العمليات الحسابية التي أصبحت سهلة بواسطة الحاسوب وتحتاج إلى وقت أقل في حالة توفر عدد كبير من القيود والمتغيرات عنها في النموذج الأول.

فمثلاً النموذج الأول يمكن أن يعرف على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix}\text{MAXIMIZE}\\ \text{أو}\\ \text{MINIMIZE}\end{bmatrix} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

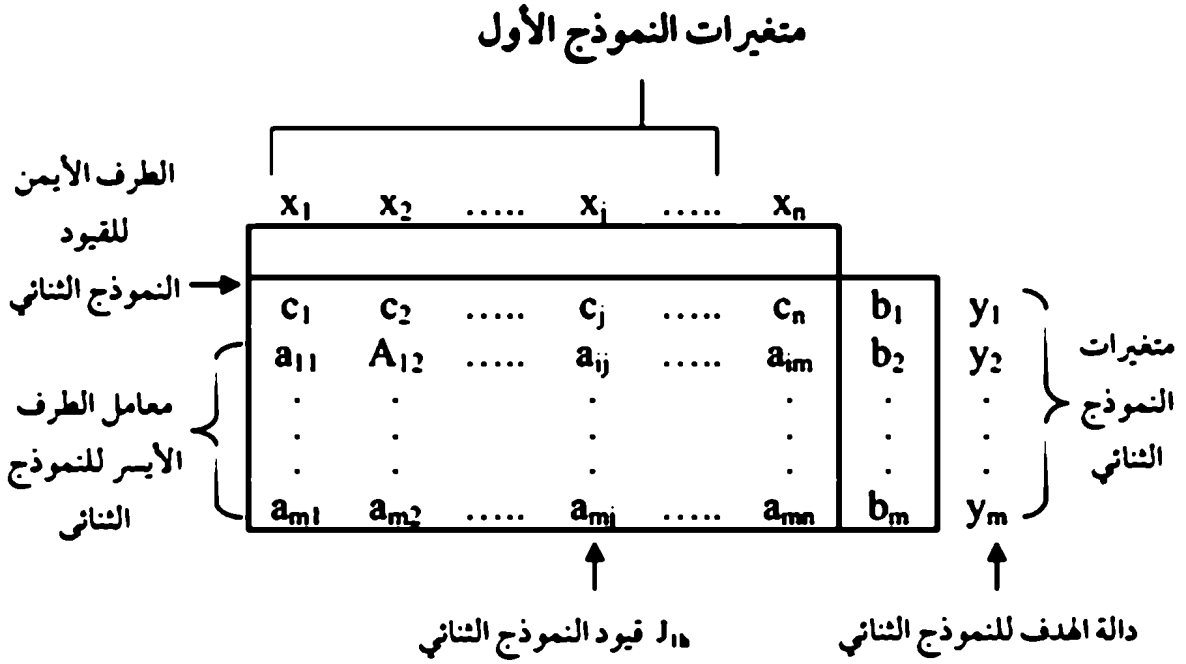
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,2,\ldots\ldots m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots\ldots n$$

مع ملاحظة أن $x_j$ تحتوي على المتغير الفائض والمتغير الصناعي.

ولتوضيح النموذج الثنائي بالنظر إلى الجدول (6.1)

جدول (1-6)




والقاعدة تعني أن النموذج الثنائي له متغيرات m ($y_1, y_2, .. y_m$) وله قيود n مقابلة ($x_1, x_2, .. x_n$).

والجدول رقم (2-6) يوضح الانتظام في التغيرين النموذج الأول والنموذج الثنائي.

جدول (2-6)

| دالة الهدف للنموذج الأول | النموذج الثنائي | | |
|---|---|---|---|
| | دالة الهدف | القيود | المتغيرات |
| تعظيم (MAX) | تصغير | ≥ | غير محددة |
| تصغير (MIN) | تعظيم | ≤ | غير محددة |

والأمثلة التالية توضح فكرة تغيير النموذج الأول إلى النموذج الثنائي:

**مثال 7.1:**

**النموذج الأول:**

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

S.T.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$

$$2x_1 = x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \ge 10$$

بإضافة المتغير الفائض والمتغير الصناعي:

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$$

S.T.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 = x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \ge 0$$

∴ النموذج الثنائي: (Dual)

$$\text{Min} \quad w = 10y_1 + 8y_2$$

S.T.

$$x_1 : \quad y_1 + 2y_2 \ge 5$$

$$x_2 : \quad 2y_1 - y_2 \ge 12$$

$$x_3 : \quad y_1 + 3y_2 \ge 4$$

$$x_4 : \quad y_1 + 0y_2 \ge 0$$

$y_1 , y_2$ غير محددة.

**مثال 7.2:**

Max $z = 5 x_1 - 2 x_2$

S.T.

$-x_1 + x_2 \geq -3$

$2 x_1 + 3 x_2 \leq 5$

$x_1 , x_2 \geq 0$

بإضافة المتغير الفائض والمتغير الصناعي:

Min $z = 5 x_1 - 2 x_2$

S.T.

$x_1 - x_2 + x_3 = 3$

$2 x_1 + 3 x_2 + x_4 = 5$

$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$

النموذج الثنائي:

Max $w = 3 y_1 + 5 y_2$

S.T.

$y_1 + 2 y_2 \leq 5$

$- y_1 + 3 y_2 \leq -2$

$y_1 \leq 0$

$y_2 \leq 0$

$y_1 , y_2$ غير محدد الإشارة .

**مثال 7.3:**

Min $z = 2 x_1 + 3 x_2 + x_3$

S.T.

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$

$2 x_1 - x_2 + x_3 \geq 17$

$x_1 , x_2 , x_3$

ويمكن إعادة كتابة المسألة على النحو التالي:

$$\text{Min} \quad z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

S.T.

$$x_1 + x_2 + x_3 \le -40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 17$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \ge 0$$

أما النموذج الثنائي:

$$\text{Max} \quad w = -40y_1 + 17y_2$$

S.T.

$$-y_1 + 2y_2 \le 2$$

$$-y_1 - y_2 \le 3$$

$$-y_1 + y_2 \le 1$$

$$y_1 , y_2 \le 0$$

## 7.2 العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي:

1- إن تحويل النموذج الثنائي إلى نموذج ثنائي يتحول إلى نموذج أول.

2- المصفوفة A (m x n) للنموذج الأولى تعطي المصفوفة (n x m) للنموذج الثنائي.

3- لكل قيود النموذج الأولى توجد علاقة لمتغيرات النموذج الثنائي والعكس صحيح.

4- لكل متغير في النموذج الأول، توجد علاقة له بقيود النموذج الثنائي والعكس صحيح.

5- لكل حل ابتدائي للنموذج الأول.

أ- $z \leq Z$

ب- $z^{\bullet} = Z^{\bullet}$

ج- إذا كان $C\, x_o = w_o\, b$ ومنها

$$x_o = x^{\bullet} \qquad w_o = w^{\bullet}$$

6- إذا كان النموذج الأول يوجد له حل أمثل فإن النموذج الثنائي له حل أمثل.

7- إذا كان النموذج الأول له حل غير محدود فإن النموذج الثنائي لا يوجد له حل والعكس صحيح.

ويمكن شرح العلاقة بين النموذج الأول (Primal problem) والنموذج الثاني (Dual problem) بواسطة العلاقة الرياضية التالية:

| النموذج الأول | النموذج الثاني |
|---|---|
| $\text{Max } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ | $\text{Min } z = 10y_1 + 8y_2$ |
| S.T. | S.T. |
| $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$ | $y_1 + 2y_2 \geq 5$ |
| $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$ | $2y_1 - y_2 \geq 12$ |
| $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ | $y_1 - 3y_2 \geq 4$ |
| | $y_1 \geq 0 \text{ - } \infty \text{ c } y_2 \text{ c} \neq \infty$ |

وبحل المسألتين كل على حدة بواسطة طريقة السمبلكس تلاحظ الحل في الجداول (6.3) و (6.4).

المعلومات التالية يمكن استنتاجها.

[الحل الأمثل لـ معادلة z للمسألة الأولى ] = [الفرق ما بين الشمال واليمين لقيود المسألة الثنائية المصاحبة للمتغيرات].

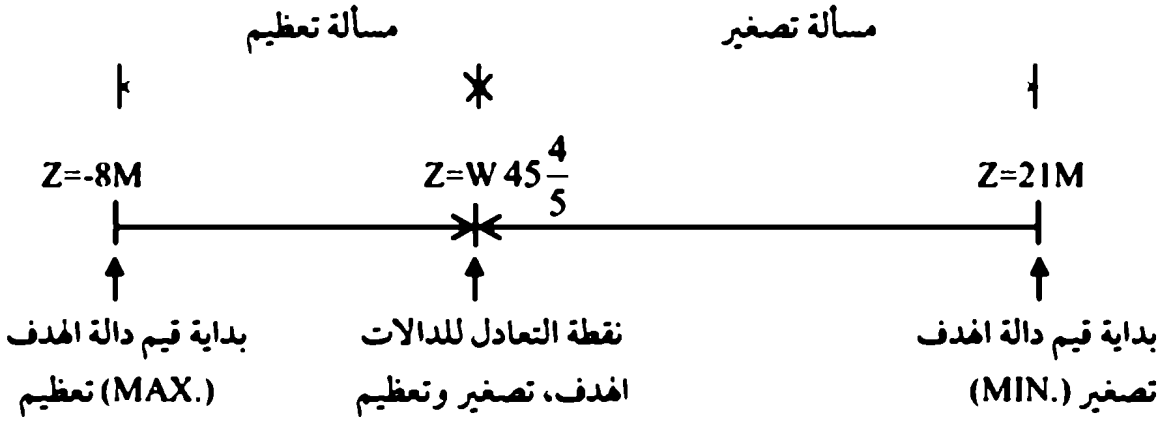
جدول (3-6)

| المحاولة | أساس | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | R | الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 (starting | z | -5-2M | -12+M | -4-3M | 0 | 0 | -8M |
| $x_3$ enters | $x_4$ | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| R leaves | R | 2 | -1 | 3 | 0 | 1 | 8 |
| 1 | z | -7/3 | -40/3 | 0 | 0 | $\frac{4}{3}+M$ | 32/3 |
| $x_2$ enters | $x_4$ | 1/3 | 7/3 | 0 | 1 | -1/3 | 22/3 |
| $x_4$ leaves | R | 2/3 | -1/3 | 1 | 0 | 1/3 | 8/3 |
| 2 | z | -3/7 | 0 | 0 | 40/7 | $-\frac{4}{3}+M$ | 368/7 |
| $x_1$ enters | $x_2$ | 1/7 | 1 | 0 | 3/7 | -1/7 | 22/7 |
| $x_3$ leaves | $x_3$ | 5/7 | 0 | 1 | 1/7 | 2/7 | 26/7 |
| 3 | Z | 0 | 0 | 3/5 | 29/5 | $-\frac{2}{5}+M$ | $54\frac{4}{5}$ |
| (optimal) | $x_2$ | 0 | 1 | -1/5 | 2/5 | -1/5 | 12/5 |
| | $x_1$ | 1 | 0 | 7/5 | 1/5 | 2/5 | 26/5 |

جدول (6-4)

| Iteration | Basic | $y_1$ | $y'_2$ | $y''_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | Solution |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 (starting) | W | -10+4M | -8+4M | 8-4M | -M | -M | -M | 0 | 0 | 0 | 21M |
| | $R_1$ | 1 | 2 | -2 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| | $R_2$ | 2 | -1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | R3 | 1 | 3 | -3 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 4 (optimal) | W | 0 | 0 | 0 | -26/5 | -12/5 | 0 | 26/5-M | 12-5-M | -M | $54\frac{4}{5}$ |
| | $y_5$ | 0 | 0 | 0 | -7/5 | 1/5 | 1 | 7/5 | -1/5 | -1 | 3/5 |
| | $y''_2$ | 0 | -1 | 1 | 2/5 | -1/5 | 0 | -2/5 | -1/5 | -1 | 2/5 |
| | $y_1$ | 1 | 0 | 0 | -1/5 | -2/5 | 0 | 1/5 | 2/5 | 0 | 29/5 |

وباقي المعلومات التي يمكن تحديدها في الشكل 6.1.




وهذه النتائج يمكن تعميمها لزوج المسألة الأولى والثنائية.

1- لكل من الحل الابتدائي للمسألة الأولى والثنائية

$$\left[\begin{array}{c}\text{دالة الهدف لمسألة}\\ \text{تعظيم}\end{array}\right] \geq \left[\begin{array}{c}\text{دالة الهدف لمسألة}\\ \text{تصغر}\end{array}\right]$$

2- الحل الأمثل للمسألة الأولي والثنائية

(دالة الهدف لمسألة تعظيم) = (دالة الهدف لمسألة تصغير)

## 7.3 أهمية العلاقة ما بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي وحساباتها:

لغرض دراسة عملية تحليل الحساسية (Sensitivity analysis) يأتي اهتمامنا بالنتيجة التي يمكن تغيرها بواسطة تغيير المعاملات والتي يمكن تؤثر على مسار الحل المحقق سواء كان الحل الابتدائي أو الحل الأمثل المعهود. ونلاحظ عند تغير الطرق الأيمن أو معاملات المتغيرات سوف نحتاج إلى إعادة حساب المسألة من جديد للتأكد من وجود حل ابتدائي أو حل أمثل للمسألة من خلال المعلومات المتوفرة بجداول

السمبلكس. ويمكن تحقيق وجود حل سريع بدون إعادة حل المسألة من جديد بواسطة العلاقة ما بين النموذج الخطي الابتدائي الثنائي. ويمكن تطوير طريقة حسابية تسمى بالسمبلكس الثنائي (Dual simplex).

وقبل شرح هذه الطريقة يستوجب النظر على بعض التعريفات الجبرية المهمة.

**تعريف:**

تعرف المصفوفة (m x n) بأنها مصفوفة مستطيلة ولها صفوف m وأعمدة n، وحجم صفوف n (1 x n) وحجم الأعمدة (m) هي (m x 1) وأن المصفوفة (m x n) تحتوي على m صفوف و n أعمدة وعلى سبيل المثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة ذات حجم (2 × 3) لها عمودين هما $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

وكل عمود له ثلاثة صفوف على النحو الآتي:

(3 , 2)  (4, -1)  (0 , 1)

**طريقة ضرب المصفوفات:**

لو فرضنا مصفوفة الصف V

$$V = (v_1, v_2, \ldots\ldots v_m)$$

والمصفوفة المستطيلة A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن:

$$V.A = (v_1, v_2, \ldots\ldots v_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} v_i a_{i1} \sum_{i=1}^{m} v_i a_{i2} \ldots\ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} v_i a_{in}$$

ولو مثلنا هذه الأرقام فإن:

$$= (11, 22, 33)\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$= (3x11+4x22+6x33, -1x11+8x22+9x33)$

$= (319 , 462)$

أما مضروب مصفوفة A x P حيث

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$A \times P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & K & a_{2n} \\ M & & K & \\ a_{m1} & a_{m2} & K & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}p_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}p_j \\ M \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}p_j \end{bmatrix}$$

ولو مثلنا هذه القاعدة بالأرقام فإن:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11\times & 1+22\times 5+33\times 7 \\ 11\times & 2+22\times 0+37\times 8 \\ 11\times & 3+22\times 6+33\times 9 \\ 11\times & -1+22\times 4+33\times -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 352 \\ 386 \\ 462 \\ 11 \end{matrix}$$

## 7.4 طرق حساب النموذج الأولي والثنائي:

يمكن شرح طريقة حساب النموذج الأولي، الثنائي باستخدام أزواج من مسائل النموذج الأول والثنائي والتي يعطي طريقة حلها بالسمبلكس في الجداول (7.1)، (7.2) حيث:

النموذج الأولي:

Max $z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3 - MR$

S.T.

$(y_1)\; x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 4\,x_3 = 10$

$(y_2) 2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 + R = 8$

$x_1, x_2, x_3, R \geq R$

النموذج الثنائي (Dual):

Minimize $z = 10\,y_1 + 8\,y_2$

S.T.

$y_1 + 2\,y_2 \geq 5 \qquad (x_1)$

$2y_2 - y_2 \geq 5 \qquad (x_2)$

$y_1 + 3\,y_2 \geq 4 \qquad (x_3)$

$y_1 + 2\,y_2 \geq 5 \qquad (x_1)$

$y_1 \geq 0 \qquad (x_1)$

$y_2 \geq -M \qquad (R)$

$y_2$ غير محدودة الإشارة (Unrestricted)

### 7.4.1 طرق حساب قيود الأعمدة:

عند أي محاولة لإحدى محاولات طريقة السمبلكس (أولي، أو ثنائي) فإن عناصر العمود الشمالية أو اليمنى لأي قيد من مصفوفات الجدول ويمكن حسابها على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix}\text{العمود في محاولة}\\ i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{معكوس المحاولة}\\ i\end{pmatrix} \times (\text{العمود الأصلي})$$

ولتوضيح هذه المعادلة باعتبار المسألة الأولية أعلاه فإن بداية الحل الأساسي لـ $x_3$ ، R في الجدول (7.1)، فإن المصفوفة المعكوسة في كل محاولة (Iteration)، فلو اعتبرنا المحاولة رقم (1) وقيد $x_1$.

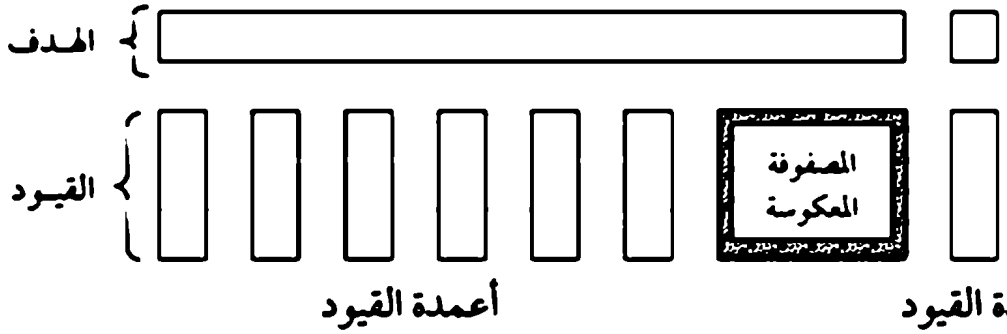
$$\begin{pmatrix}\text{العمود } x_1\\ \text{في الأصلي}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{معكوس}\\ \text{المحاولة الأولى}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{العمود } x_1\\ \text{الأصلي}\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \\ \frac{2}{3}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ \\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \\ 2\end{pmatrix}$$

في محاولة رقم (2)

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{1} & -\frac{1}{7}\\ \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ \\ 8\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{22}{7}\\ \\ \frac{26}{7}\end{bmatrix}$$

لتوضيح الطريقة بالرسم كما هو في الشكل (7.2).




شكل (2-7)

### 7.4.2 طريقة حساب صف دالة الهدف:

عند أي محاولة أثناء إجراء عملية السمبلكس للمسألة الأولية، فإن عناصر معادلة دالة الهدف لكل متغير $x_j$ يمكن حسابها بالطريقة التالية:

(الجانب الأيمن من القيد الثنائي المقابل) - (الجانب الأيسر من القيد الثنائي المقابل) = (عنصر $x_1$ × معادلة الهدف).

وبتطبيق هذه المعادلة على النموذجين الأول والثاني السابقين سنحصل على المعادلات الآتية:

بتطبيق المعادلة أعلاه فإن:

معامل z لـ $x_1 = y_1 + 2\,y_2 - 5$

معامل z لـ $x_2 = 2\,y_1 + 2\,y_2 - 12$

معامل z لـ $x_3 = y_1 + 3\,y_2 - 4$

معامل z لـ $x_4 = y_1 - 0$

معامل $R = (-M) - y_2 = M + y_2$

ولحساب هذه المعاملات عددياً نحتاج إلى قيم عددية للمتغيرات $y_1$ ، $y_2$ لأن معاملات دالة الهدف تتغير عند أي محاولة، ونتوقع أن قيم $y_1$، $y_2$ تتغير من محاولة إلى التي بعدها، والصياغة التالية يمكن استخدامها لحل إيجاد قيم المتغيرات الثنائية عند أي محاولة.