
أولاً : التكامل بالتجزئة : Integration by Parts

إذا كانت كل من $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دالتين لـ x

فان

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

هناك طريقتان : الاولى تُسمى **طريقة الاسهم** وتصلح لتكاملات الدوال

$x^n \sin ax$, $x^n \cos ax$, $x^n e^{ax}$, $e^{ax} \cos bx$ and $e^{ax} \sin bx$

حيث $n \in N^+$, $a, b \in \mathcal{R}$

والمثال التالي يوضح هذه الطريقة

مثال (١): جد

$$1. \int x^2 \cos 2x\,dx \qquad 2. \int x^3 e^{2x}\,dx \qquad 3. \int e^{3x} \sin 2x\,dx$$

الحل :

1.

ومشتقاتها x^2		وتكاملاتها $\cos 2x$
x^2		$\cos 2x$
$2x$	+	$\frac{1}{2}\sin 2x$
2	−	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
0	+	$-\frac{1}{8}\sin 2x$

$$\therefore \int x^2 \cos 2x\,dx = x^2 \times \frac{1}{2}\sin 2x + 2x \times \frac{1}{4}\cos 2x - 2 \times \frac{1}{8}\sin 2x + c$$

$$= \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x + c$$

2.

x^3 ومشتقاتها		e^{2x} وتكاملاتها
x^3	+	e^{2x}
$3x^2$	−	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$6x$	+	$\frac{1}{4}e^{2x}$
6	−	$\frac{1}{8}e^{2x}$
0		$\frac{1}{16}e^{2x}$

$$\int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3x^2}{4}e^{2x} + \frac{6x}{8}e^{2x} - \frac{6}{16}e^{2x} + c$$

$$= \frac{1}{8}e^{2x}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) + c$$

3.

e^{3x} ومشتقاتها		$\sin 2x$ وتكاملاتها
e^{3x}	+	$\sin 2x$
$3e^{3x}$	−	$-\frac{1}{2}\cos 2x$
$9\,e^{3x}$	+	$-\frac{1}{4}\sin 2x$

$$\therefore \int e^{3x}\sin 2x\;\,dx = -\frac{1}{2}\;e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}\;e^{3x}\sin 2x\;\; -\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\;\,dx + c_1$$

$$\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\;\,dx + \int e^{3x}\sin 2x\;\,dx = -\frac{1}{2}\;e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}\;e^{3x}\sin 2x\;\, + c_1$$

$$\left(\frac{9}{4}+1\right)\int e^{3x}\sin 2x\;\,dx = -\frac{1}{2}\;e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}\;e^{3x}\sin 2x\;\, + c_1$$

$$\frac{13}{4}\int e^{3x}\sin 2x\;\,dx = -\frac{1}{2}\;e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}\;e^{3x}\sin 2x\;\, + \;c_1$$

$$\int e^{3x}\sin 2x\;\,dx = \frac{4}{13}\,e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\;\sin 2x\;\right) + \frac{4}{13}\,c_1$$

$$\int e^{3x}\sin 2x\;\,dx = \frac{1}{13}\,e^{3x}\,(\;\sin 2x\;\; - 2\cos 2x\,) + c$$

Al-Mustaqbal University / College of Engineering & Technology
Department Of Communication Engineering Class (1st)
Subject (calculus 1) / Code (TE-UOMUS-094241217-574)
Lecturer (M.Sc. Fatimatulzahraa Adnan)
2nd term – Lecture No.5 & Lecture Name (integration by parts)

والطريقة الثانية هي التجزئة الاعتيادية وتصلح لتكاملات الدوال

$\ln w$, $\sin^{-1} w$, $\cos^{-1} w$, $\tan^{-1} w$, $\cot^{-1} w$, $\sec^{-1} w$ and $\csc^{-1} w$

حيث $w = w(x)$ وهنا نختار الـ u من الدوال اعلاه وما تبقى يكون dv

والمثال التالي يوضح هذه الطريقة

مثال (٢): جد

1. $\int \ln x \, dx$ 2. $\int \sin^{-1} 2x \, dx$ 3. $\int x \sec^{-1} x \, dx$

الحل :

1. $u = \ln x$ and $dv = dx$

$$du = \frac{dx}{x} \quad and \quad v = x$$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\therefore \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x.\frac{dx}{x}$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

2. $u = \sin^{-1} 2x$ and $dv = dx$

$$du = \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \quad and \quad v = x$$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\therefore \int \sin^{-1} 2x \, dx = x \sin^{-1} 2x - \int \frac{2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= x \sin^{-1} 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + c$$

Al-Mustaqbal University / College of Engineering & Technology

Department Of Communication Engineering Class (1st)

Subject (calculus 1) / Code (TE-UOMUS-094241217-574)

Lecturer (M.Sc. Fatimatulzahraa Adnan)

2nd term – Lecture No.5 & Lecture Name (integration by parts)

---

3. $u = \sec^{-1} x \qquad and \qquad dv = x dx$

$$du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int u\, dv = u.v - \int v\, du$$

$$\int x \sec^{-1} x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \sec^{-1} x - \int \frac{1}{2}x^2 \; \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sec^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sec^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c$$

تمارين

جد الحل للتكاملات التالية :

1. $\int x \ln x\, dx$
2. $\int x^3 e^{3x}\, dx$
3. $\int \tan^{-1} x\, dx$
4. $\int e^{2x} \cos 3x \; dx$
5. $\int x^3 \sin 3x \; dx$
6. $\int \cos^{-1} \sqrt{x} \; dx$
7. $\int \sec^{-1} \sqrt{x} \; dx$