Ministry of Higher Education and
Scientific Research – Iraq
AL-Mustaqbal University

Department of ElectricalEngineering techniques

الرياضيات التكاملية

محاضرة 6

Applications to definite integration

م.م زهراء إبراهيم الهزاع

مثال (١) احسب التكاملات المحددة التالية :

$$1.\int_{1}^{3}\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)\,dx \qquad 2.\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$$

$$3.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \qquad 4.\int_{1}^{3}\frac{dx}{x^2-2x+5}$$

الحل:

$$1.\int_{1}^{3}\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\bigg|_{1}^{3}=9-\frac{1}{12}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{53}{6}$$

$$2.\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin^2 x}\,dx=\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\ \bigg|_{0}^{\pi}$$

$$=-\cos\pi-(-\cos 0)=-(-1)+1=2$$

$$3.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{2}\bigg|_{-1}^{1}=\sin^{-1}\frac{1}{2}-\sin^{-1}\frac{-1}{2}=\sin^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{1}{2}$$

$$=2\sin^{-1}\frac{1}{2}=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

$$4.\int_{1}^{3}\frac{dx}{x^2-2x+5}=\int_{1}^{3}\frac{dx}{4+x^2-2x+1}=\int_{1}^{3}\frac{dx}{4+(x-1)^2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-1}{2}\bigg|_{1}^{3}$$

$$=\frac{1}{2}(\tan^{-1}1-\tan^{-1}0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{8}$$

تطبيقات على التكامل المحدد

هناك الكثير من التطبيقات على التكاملات المحددة كحساب المساحات المستوية وطول قوس الدالة و إيجاد حجوم الأجسام الدورانية وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة وفي مسائل حركة الاجسام و إيجاد ضغط السائل وكذلك في حساب سرعة جزيئات الغاز والكثير من التطبيقات الاخرى وهنا سنتطرق الى المساحات المستوية وطول القوس .

أولاً : المساحة تحت المنحني

لحساب المساحات تحت المنحني يجب مراعاة الملاحظات التالية :

١. اذا كانت $f(x) \geq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a,b]$ فان المساحة هي

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

٢. اذا كانت $f(x) \leq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a,b]$ فان المساحة هي

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

٣. اذا وجد $c \in [a,b]$ بحيث ان $f(x) \geq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a,c]$ و $f(x) \leq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[c,b]$ فان المساحة هي

$$A = \int_a^c f(x)\,dx + \left| \int_c^b f(x)\,dx \right|$$

Ex:2 Find the area between the curve y=$\sqrt{x}$, the x-axis, and the two straight lines x=0,x=4

مثال (٢) جد المساحة الواقعة بين المنحني $y = \sqrt{x}$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 0\,, x = 4$.

الحل :

$$\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \in [0,4]$$

$$A = \int_0^4 \sqrt{x}\;dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

Ex3:Find the area bounded by the function curve y = 4-x and the x-axis

مثال (٣) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 4 - x^2$ والمحور السيني .

الحل: لإيجاد حدود التكامل نقاطع منحني الدالة $y = 4 - x^2$ مع المحور السيني $y = 0$

$$4 - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \mp 2$$

$$4 - x^2 \geq 0 \quad \forall x \in [-2,2]$$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\ dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

Ex:4 Find the area between the curve y= x^3, the x-axis, and the two straight lines x=2,x=-3

مثال (٤) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 2 , x = -3$.

الحل :

$$x^3 \geq 0 \quad \forall x \in [0,2] \quad and \quad x^3 \leq 0 \quad \forall x \in [-3,0]$$

$$A = \left| \int_{-3}^{0} x^3\ dx \right| + \int_{0}^{2} x^3\ dx = \left| \frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{0} \right| + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{81}{4} + 4 = \frac{97}{4}$$

Ex:4 Find the area between the curve y= $\cos x$, the x-axis, and the two straight lines x=0,x=π

مثال (٥) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ والمستقيمين $x = \pi$, $x = 0$.

الحل :

$$0 \le \cos x \le 1 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ \ and \quad -1 \le \cos x \le 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \ dx \right|$$

$$= \sin x \ \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \left| \sin x \ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 + \left| \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} \right|$$

$$= 1 + 1 = 2$$

Thanks for lessening ..

Any questions?