Linear Second Order Homogenous Equation with constant coefficients

The general form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)\,y = R(x)$$

if $R(x) = 0$ ∴ homogenous equations معادله متجانسة

if $R(x) \neq 0$ ∴ non-homogenous equations معادله غير متجانسة

where :-

$P(x)$:- The function adjacent to $(\frac{dy}{dx})$ when the coefficient of $(\frac{d^2y}{dx^2})$ is equal to 1.

$P(x)$:- هو الدالة المجاورة لـ $(\frac{dy}{dx})$ عندما يكون معامل $(\frac{d^2y}{dx^2})$ يساوي (1)

$Q(x)$:- The function adjacent to (y) when the coefficient of $(\frac{d^2y}{dx^2})$ is equal to 1.

$Q(x)$:- هو الدالة المجاورة لـ (y) عندما يكون معامل $(\frac{d^2y}{dx^2})$ يساوي (1)

$R(x)$:- The right side function is free from (y) and it derivative when the coefficient of $(\frac{d^2y}{dx^2})$ is equal to (1)

$R(x)$:- هو الدالة في الجهة اليمنى والخالية من المتغير (y) ومشتقاته عندما معامل $(\frac{d^2y}{dx^2})$ يساوي (1)

خطوات الحل :-

(1) تحويل المعادلة التفاضلية بصيغة المعادلة المميزة كالتالي :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Let $y = e^{mx}$ ، $\frac{dy}{dx} = me^{mx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$ sub. in above equation.

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

$am^2 + bm + c = 0$ is called characteristic equation

المعادلة المميزة .

(2) حل المعادلة المميزة بقانون الدستور وبالحالات الآتية :

$$m_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- اذا كانت الكمية تحت الجذر اكبر من الصفر (قيمة موجبة) فقيم الـ m ستكون قيم حقيقية وبذلك يكون الحل عبارة عن :

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

- اذا كانت الكمية تحت الجذر تساوي صفر فان $m_1 = m_2 = m$ وبذلك يكون الطرفين متشابهين فيضرب أحدهما بـ x فيكون الحل عبارة عن :

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

- عندما تكون الكمية تحت الجذر أصغر من الصفر (كمية سالبة) فقيم الـ m ستكون قيم خيالية وبذلك يكون الحل عبارة عن :

$$m_{1,2} = \alpha \mp i\beta$$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

Ex8- Find the general solution for the following differential equation :-

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow m^2 + 2m = 0$

$m(m+2) = 0$

$\therefore m = 0$ and $m = -2$

$\Rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{0x}$

$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + c_2}$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

$m^2 + 5m + 6 = 0$

$(m+3)(m+2) = 0$

$\therefore m = -3$ or $m = -2$

$\Rightarrow \boxed{y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}}$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

$m^2 - 4m + 4 = 0$

$(m-2)(m-2) = 0$

$\Rightarrow m = -2$ or $m = -2$

$\Rightarrow y = c_1 x e^{-2x} + c_2 e^{-2x}$

$\Rightarrow \boxed{y = (c_1 x + c_2) e^{-2x}}$

(4) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$

$m^2 + m + 1 = 0$

$m = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad (a=1,\ b=1,\ c=1)$

$m = \frac{-1 \mp \sqrt{1^2 - 4*1*1}}{2*1} = \frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$m_1 = \alpha + i\beta \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$m_2 = \alpha - i\beta \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\alpha = -\frac{1}{2}$

$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Linear Second order non-homogenous equation

The general form:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

if $R(x) \neq 0 \Longrightarrow$ Non-homogenous equations.

Theorem: if (Y) is solution to the non-homogenous equation, then $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ is general solution for homogenous equations, then the complete solution for non-homogenous equations is:

$$y = \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2}_{\text{homogenous solution.}} + \underbrace{Y}_{\text{particular integration}}.$$

الحالة الأولى:

→ If $R(x)$ has a term that is a constant multiple of e^{mx}.

→ if m is not a root of the characterisitic equation.

then $y_p = Ae^{mx}$.

→ if m is a single root of the characterisitic equation

then $y_p = Axe^{mx}$.

→ if m is a double root of the characteristic equation

then $y_p = Ax^2e^{mx}$.

Ex8- Find the complete solution of the differential equation.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 5e^{2x}.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$m^2 + 4m + 3 = 0$$

$$(m+1)(m+3) = 0$$

$\Rightarrow$ $m = -1$.

$m = -3$.

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

$\Rightarrow 5e^{2x}$ is not a root of the characterisitic equation.

then $\Rightarrow y_p = Ae^{2x} \Rightarrow y_p' = 2Ae^{2x} \Rightarrow y_p'' = 4Ae^{2x}$

$$4Ae^{2x} + 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 5e^{2x}$$

$$15Ae^{2x} = 5e^{2x} \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$\therefore y_p = \frac{1}{3}e^{2x}$

$\therefore y = y_h + y_p$

$$= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}e^{2x}.$$

Ex: Find the complete solution of the differential equation.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 5e^{-3x}$$

$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$ كما في المثال السابق

$\Rightarrow 5e^{-3x}$ is a single root of the characteristic equation.

then $\Rightarrow y_p = Ax e^{-3x}$

$$y'_p = -3Ax e^{-3x} + A e^{-3x}$$

$$y''_p = -3A(-3x e^{-3x} + e^{-3x}) - 3A e^{-3x}$$

$$= 9Ax e^{-3x} - 6A e^{-3x}.$$

$$9Ax e^{-3x} - 6A e^{-3x} + 4(-3Ax e^{-3x} + A e^{-3x}) + Ax e^{-3x}$$

$$= 5e^{-3x}$$

$$\Rightarrow -2A e^{-3x} = 5e^{-3x}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{5}{2}.$$

$\therefore y_p = -\frac{5}{2} x e^{-3x}.$

$\therefore y = y_h + y_p$

$$= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} - \frac{5}{2} x e^{-3x}.$$