أسم المادة : تحليلات عددية

أسم التدريسي : م. د. مروان عبّاس مظلوم

المرحلة : الثالثة

السنة الدراسية : 2025 - 2026

عنوان المحاضرة : التكامل العددي **Numerical Integration**

2.Numerical Integration :

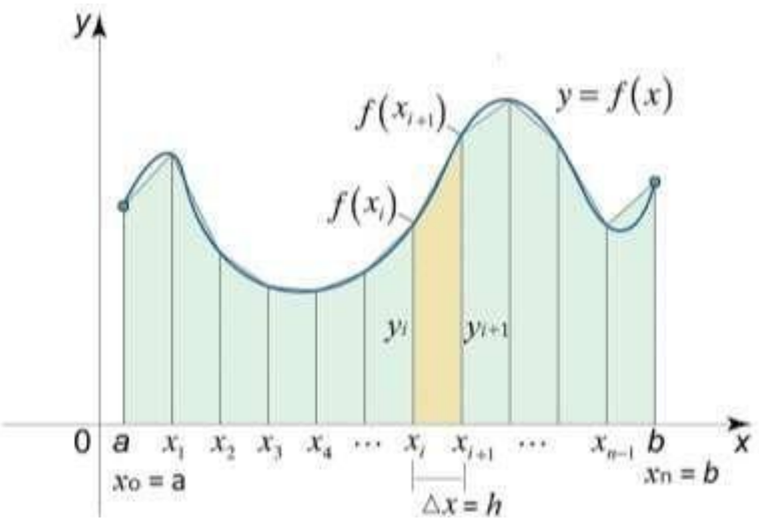
من التطبيقات الشائعة للطرق العددية هو استعمالها في التكامل المحدد او ما يعبر عنه بالمساحة تحت المنحني. يتم اللجوء الى التكامل العددي عندما يكون التكامل معرف بمجموعة قيم بشكل جدول قراءات مختبرية لتجربة معينة او تكون هناك صعوبة وأحيانا استحالة في إيجاد قيمة التكامل للدالة بالطرق الاعتيادية. ومن اهم طرق التكامل العددي هي:

2.1 Trapezoidal Rule قاعدة شبه المنحرف

تعتمد هذه الطريقة على تقسيم المساحة المراد حساب التكامل لها الى عدة شرائح وبعد ذلك يتم حساب المساحة التقريبية الكلية من مجموع الشرائح. ان دقة التكامل تعتمد على عدد الشرائح المأخوذة، فكلما زاد عدد الشرائح كلما كانت النتائج أكثر دقة.

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$



$$A_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{b - a}}{\boldsymbol{n}},$$

$$a = x_o,\ \ b = x_n, \qquad n = number\ of\ section$$

$$A_i = \frac{h}{2}[y_i + y_{i+1}]$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \dots \dots \dots \dots + A_n$$

E-mail : marwan.abbas.madhloom@uomus.edu.iq

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{h}{2}[y_o + y_1] + \frac{h}{2}[y_1 + y_2] + \dots\dots\dots + \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]$$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_o + y_n + 2\sum_{j=1}^{n-1} y_j\right]}$$

Example (1) : Use Trapezoidal Rule to calculate the area bounded by the following data :

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
$f(x)$	6.1	7.4	9	11	13.5	16.4	20.1	24.5	30

Solution :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_o + y_n + 2\sum_{j=1}^{n-1} y_j\right]$$

$a = 1.8\,,\quad b = 3.4\,,\ n = 8$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3.4 - 1.8}{8} = 0.2$$

$$\int_{1.8}^{3.4} f(x)\,dx = \frac{0.2}{2}[6.1 + 30 + 2(7.4 + 9 + 11 + 13.5 + 16.4 + 20.1 + 24.5)]$$

$$\int_{1.8}^{3.4} f(x)\,dx = 23.99\ \ units^2$$

Example (2): Evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ by using Trapezoidal Rule, $n = 5$?

Solution :

$a = 0\,,\quad b = 1\,,\ n = 5$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

E-mail : marwan.abbas.madhloom@uomus.edu.iq

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

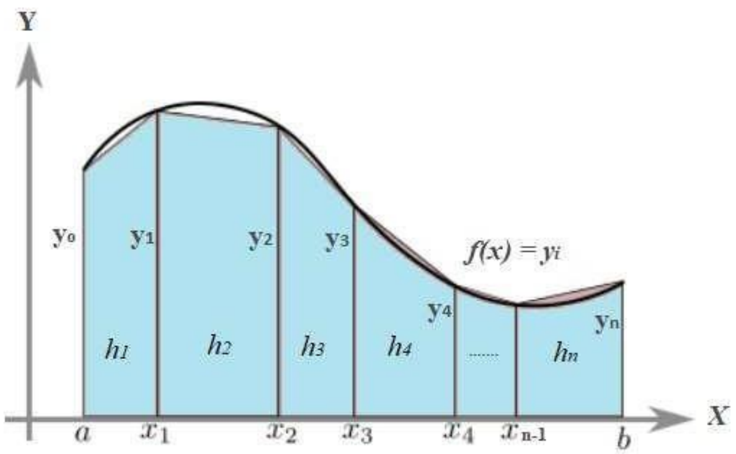
x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	1	0.961	0.862	0.735	0.610	0.5

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_o + y_n + 2\sum_{j=1}^{n-1} y_j\right]$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{0.2}{2}\left[1 + 0.5 + 2(0.961 + 0.862 + 0.735 + 0.610)\right]$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.784 \;\; units^2$$

ملاحظة: الطريقة السابقة تعتمد على مسافات متساوية بين قيم (x) أي عرض الشريحة ثابت) لكن في حالةكون المسافات غير متساوية كما هو الحال في اغلب التجارب المختبرية فيتم حساب مساحة شبه المنحرف لكل شريحة وجمع مساحات كل الشرائح وكما يلي:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{[y_o + y_1]}{2} \times h_1 + \frac{[y_1 + y_2]}{2} \times h_2 + \dots + \frac{[y_{n-1} + y_n]}{2} \times h_n$$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{[y_i + y_{i+1}]}{2} \times h_i}$$

E-mail : marwan.abbas.madhloom@uomus.edu.iq

Example (3) : Use Trapezoidal Rule to determine the integration in the following data :

x	0	1	3	4	5
y	1	2	10	17	26

Solution :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{[y_i + y_{i+1}]}{2} \times h \ , \quad a = 0\ , \quad b = 5$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{[1+2]}{2} \times (1-0) + \frac{[2+10]}{2} \times (3-1) + \frac{[10+17]}{2} \times (4-3)$$
$$+ \frac{[17+26]}{2} \times (5-4)$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 48.5\ units^2$$

H. W (1): Evaluate $\int_{1.5}^{2} \ln(x)\,dx$ by using Trapezoidal Rule, $n = 5$?

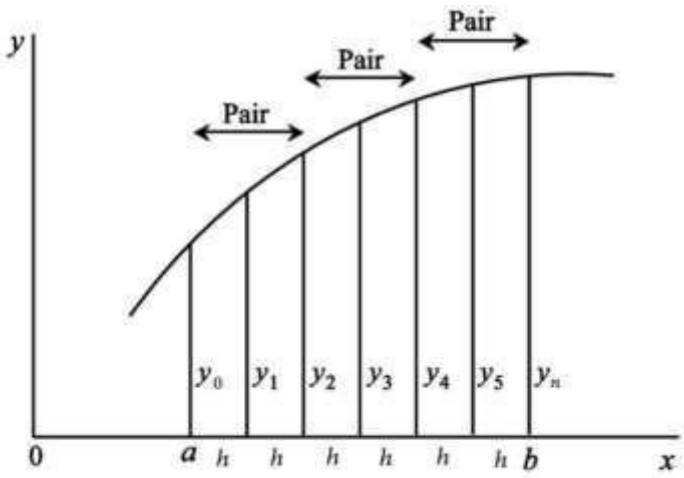
H.W (2): Use Trapezoidal Rule to determine the integration in the following data :

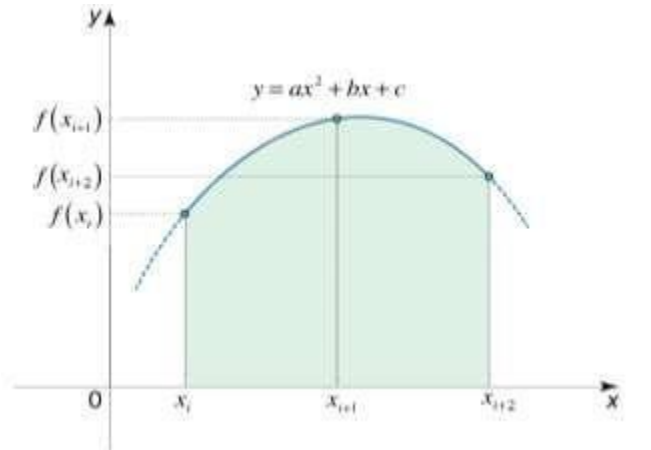
x	0	0.2	0.5	0.75	1
y	1	0.99	0.96	0.91	0.84

E-mail : marwan.abbas.madhloom@uomus.edu.iq

2.2 Simpson's Rule

تستند هذه الطريقة على أساس تقسيم المساحة المطلوب حساب التكامل لها الى عدد زوجي من الشرائح المتساوية عرض كل شريحة منهما يساوي (h) بحيث يمر قطع مكافئ في كل ثالث نقاط متجاورة وبعد ذلك يتم حساب المساحة التقريبية الكلية من مجموع الشرائح.





ملاحظة: هذه الطريقة تقرب كل ثالث نقاط الى معادلة من الدرجة الثانية يمكن إيجاد المساحة لها، لذلك يكون مقدار الخطأ قليل على العكس من الطريقة السابقة.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_o + y_n + 4\sum_{i=odd}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=even}^{n-2} y_i\right]$$

where:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad a = x_o, \quad b = x_n, \qquad n = number\ of\ section$$

$odd = 1,3,5,\ldots \quad and \quad even = 2,4,6,\ldots.$

E-mail : marwan.abbas.madhloom@uomus.edu.iq

Example (1) : Calculate the area bounded by the following data :

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
$f(x)$	6.1	7.4	9	11	13.5	16.4	20.1	24.5	30

Solution :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_o + y_n + 4\sum_{i=odd}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=even}^{n-2} y_i\right]$$

$a = 1.8\,,\quad b = 3.4\,,\quad n = 8$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3.4-1.8}{8} = 0.2$$

$$\int_{1.8}^{3.4} f(x)\,dx = \frac{0.2}{3}\left[6.1 + 30 + 4(7.4 + 11 + 16.4 + 24.5) + 2(9 + 13.5 + 20.1)\right]$$

$$\int_{1.8}^{3.4} f(x)\,dx = 23.9\ units^2$$

Example (2): Evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ by using Simpson's rule, n=6 ?

Solution :

$a = 0\,,\quad b = 1\,,\quad n = 6$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

E-mail : marwan.abbas.madhloom@uomus.edu.iq

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$f(x)$	1	0.973	0.9	0.8	0.692	0.59	0.5

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_o + y_n + 4\sum_{i=odd}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=even}^{n-2} y_i\right]$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1/6}{3}\left[1 + 0.5 + 4(0.973 + 0.8 + 0.59) + 2(0.9 + 0.692)\right]$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.785\ units^2$$

H. W (1): Evaluate $\int_{1.5}^{2} \ln(x)\,dx$ by using Simpson's Rule, use n = 6.

E-mail : marwan.abbas.madhloom@uomus.edu.iq