



The Limit and Continuity of a Function (Laws, At Infinity, Special Limits, Continuity Conditions)

Limits of Function Values

when studying a function: $y = f(x)$

the interest in the function's behavior near a particular point c , not at c itself.

الاهتمام بسلوك الدالة عند الاقتراب من نقطة c ، وليس عند c نفسها.

Evaluate a function at c leads to division by zero which is undefined.

وحساب قيمة الدالة عند قيمة c يقود الى قسمة عدد على صفر والذي يكون قيمة غير معروفة.

Example 1: How does the function behave near $x = 1$? كيف تتصرف الدالة قرب العدد 1

Solution : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

x is all real numbers except $x = 1$, i.e. $x \neq 1$ لان المقام سيكون صفر وسوف يعطي ما لانهاية

نجري عمليات حسابية للتخلص من المقام, باستخدام طريقة فرق مربعين

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

نعوضها بالدالة

$$f(x) = \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}{\cancel{x - 1}} = x + 1 \quad \text{for } x \neq 1.$$

The graph of the function f is the line $y = x + 1$ with the point $(1, 2)$ removed

النقطة تم حذفها وتم رسمها على شكل فجوة .



$f(1)$ is not defined, can make the value of $f(x)$ as close as to 2 by choosing x close enough to 1 (Table 1).

عندما تكون $x=1$ فان قيمة الدالة تكون غير معروفة مالا نهاية (∞) لذلك ممكن ان نختار قيمة قريبة من الواحد وهي (1.000001) وستكون هنالك قيمة تقريبية للدالة وهي (2.000001).

Table 1 x and y values

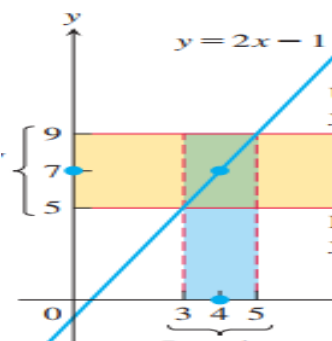
x	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

Example 2 : Find the limit of the function $y = 2x - 1$ when near $x = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 1)$$

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 1) = 2 * 4 - 1 = 7$$



معنى الغاية limit: عندما تقترب قيمة x من 4 فان قيمة y تقترب من 7



ملاحظات : Notes

1. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c.$

عندما تكون الدالة فقط x فان الناتج هو قيمة x

Example 3 : Find limit of $f(x)=x$ when x near to 3

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k.$

عندما تكون الدالة عبارة عن قيمة ثابتة (رقم) مثلا 1 او 3 فان الناتج هو القيمة الثابتة (1 او 3) مهما كانت قيم c .

Example 4 : Find limit of $f(x)=4$ when $x \rightarrow -7$ or $x \rightarrow 2$

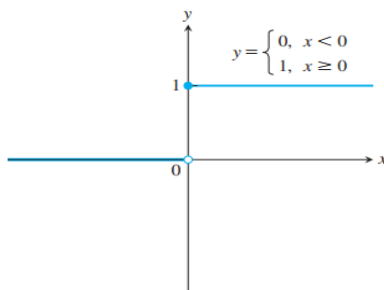
$$\lim_{x \rightarrow -7} (4) = \lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4.$$

Example 5 : Draw functions $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

solution :

توجد دالتين :

الدالة الاولى : عندما تكون قيم x اقل من صفر فان الدالة $u(x)$ تساوي 0 مهما كانت قيم x
الدالة الثانية : عندما تكون قيم x اكبر او مساوي صفر فان الدالة $u(x)$ تساوي 1 مهما كانت قيم x





Example 6 : Draw functions

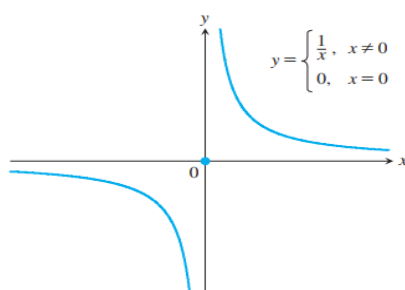
solution :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

توجد دالتين :

الدالة الاولى : عندما تكون قيمة x لا تساوي صفر فان الدالة $g(x)$ تساوي $1/x$

الدالة الثانية : عندما تكون قيمة x تساوي صفر فان الدالة $g(x)$ تساوي صفر



Limits Laws قوانين النهايات

اذا كانت عبارة عن جمع دالة مع دالة فان النهاية لهما تتوزع عليهما والنتيجة هو عبارة عن مجموع النهايات

اذا كانت عبارة عن دالة مضروبة في دالة فان النهايات لهما تكون حاصل ضرب الدوال. وهكذا للباقية

THEOREM 1 – Limit Laws

If L, M, c , and k are real numbers and

ليست حفظ فقط فهم كيفية توزيع النهايات

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

$$\text{and } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \text{ then}$$

$$\text{limit } f(x) + \text{limit } g(x)$$

1. Sum Rule:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

2. Difference Rule:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$$

3. Constant Multiple Rule:

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

4. Product Rule:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

5. Quotient Rule:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

6. Power Rule:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n, \quad n \text{ a positive integer}$$

7. Root Rule:

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}, \quad n \text{ a positive integer}$$



Example 7 : Find the following limit: $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3)$

Solution :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3) &= \lim_{x \rightarrow c} x^3 + \lim_{x \rightarrow c} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 3 \\ &= c^3 + 4c^2 - 3\end{aligned}$$

HW / Find the following limits:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} \quad 2. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$$

Infinity

Finite Limits المحددة as $x \rightarrow \pm\infty$

لا يُمثل رمز اللانهاية (∞) عددًا حقيقيًا. نستخدم ∞ لوصف سلوك الدالة عندما تتجاوز القيم في مجالها أو مداها جميع القيم المحدودة.

Example 8 : Calculate limit $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)$

Solution

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \\ &= 5 + 0 = 5\end{aligned}$$

Example 9 : Calculate limit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$

Solution :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \\ &= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$



Example 10 : Calculate limit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$

Solution :

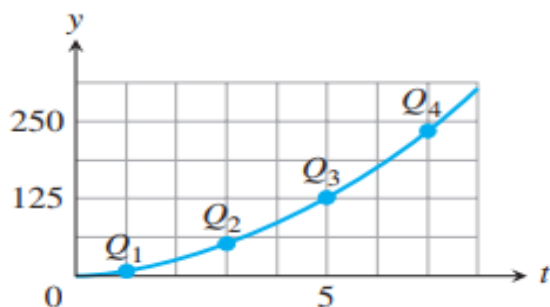
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)}$$
$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

HW Calculate limits:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 3}{x^2 - 4}$$

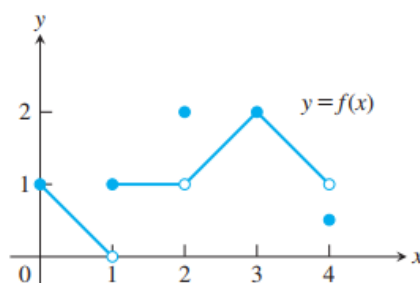
Continuity Conditions

- ❖ The function values in a laboratory connected as shown in figure, the curve unbroken. مجموعة بيانات من مختبر تم رسمها وظهر شكل منحنى بدون انقطاع يعني النقاط مستمرة.
- ❖ This is mean continuous function دالة مستمرة
- ❖ play important role in study of calculus and its applications. يلعب دور بالعمليات الحسابية وتطبيقاتها





Example 11: which the numbers does the function f in Figure not continuous? اي من هذه الارقام تجعل الدالة غير مستمرة



Solution :

The domain (i.e x values) of the function is the closed interval $[0, 4]$

يعني قيم x محصورة ضمن الفترة المغلقة 0 و 4

From the figure:

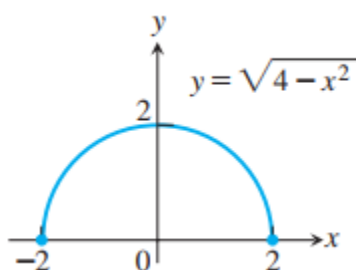
at $x = 1$, (jump discontinuity وقفز) breaks in the graph

at $x = 2$ (removable discontinuity وانقطاع) create a new function

and $x = 4$ (removable discontinuity وانقطاع)

Example 12 : Is the function $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ continuous over its domain $[-2, 2]$?

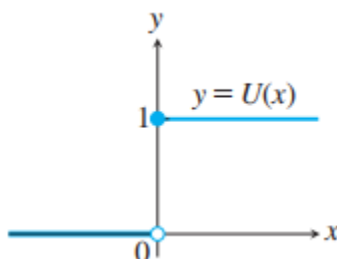
Solution : yes , it is right-continuous at $x = -2$, and left-continuous at $x = 2$.





Example 13 : is the function $U(x)$ graphed in the figure, continuous or not ?

هل الدالة $U(x)$ مستمرة ام لا؟



Solution :

It is right-continuous at $x = 0$, من اليمين مستمرة

but in left- not continuous, it has a jump discontinuity at $x = 0$

من اليسار غير مستمرة هنالك قفزة من الصفر الى 1