The Limit and Continuity of a Function (Laws, At Infinity, Special Limits, Continuity Conditions)

Limits of Function Values

when studying a function: $y = f(x)$

the interest in the function's behavior near a particular point c, not at c itself.

الاهتمام بسلوك الدالة عند الاقتراب من نقطة c، وليس عند c نفسها.

Evaluate a function at c leads to division by zero which is undefined.

وحساب قيمة الدالة عند قيمة c يقود الى قسمة عدد على صفر والذي يكون قيمة غير معروفة.

Example 1: How does the function behave near $x = 1$? 1 كيف تتصرف الدالة قرب العدد

Solution : $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x is all real numbers except $x = 1$, i.e $x \neq 1$ لان المقام سيكون صفر وسوف يعطي ما لانهاية

نجري عمليات حسابية للتخلص من المقام, باستخدام طريقة فرق مربعين

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

نعوضها بالدالة

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad \text{for} \quad x \neq 1.$$

The graph الرسم of f الدالة is the line $y = x + 1$ with the point (1, 2) removed

النقطة تم حذفها وتم رسمها على شكل فجوة .

aseel.safi.hamzah@uomus.edu.iq shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq
Zainab.haider.obaid@uomus.edu.iq

$f(1)$ is not defined, can make the value of $f(x)$ as close as to 2 by choosing x close enough to 1 (Table 1).

عندما تكون x=1 فان قيمة الدالة تكون غير معروفة مالانهاية (∞) لذلك ممكن ان نختار قمية قريبة من الواحد وهي (1.000001) وستكون هنالك قيمة تقريبية للدالة وهي (2.000001).

Table 1 x and y values

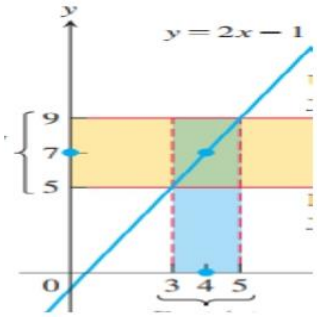
x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

Example 2 : Find the limit of the function $y = 2x - 1$ when near تقترب $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4}(2x-1)$$

Solution :

$\lim(_{x\to 4}2x-1) = 2*4-1 = 7$



معنى الغاية limit: عندما تقترب قيمة x من 4 فان قيمة y تقترب من 7

aseel.safi.hamzah@uomus.edu.iq shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq
Zainab.haider.obaid@uomus.edu.iq

Notes : ملاحظات

1. $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c.$

عندما تكون الدالة فقط Xفان الناتج هو قيمة x

Example 3 : Find limit of f(x)=x when x→ 3

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad = \quad \lim_{x\to 3} x = 3$$

2. $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k.$

عندما تكون الدالة عبارة عن قيمة ثابتة (رقم) مثلا 1 او 3 فان الناتج هو القيمة الثابتة (1 او3) مهما كانت قيم c.

Example 4 : Find limit of f(x)=4 when x→ -7 or x→ 2

$$\lim_{x\to -7} (4) = \lim_{x\to 2} (4) = 4.$$

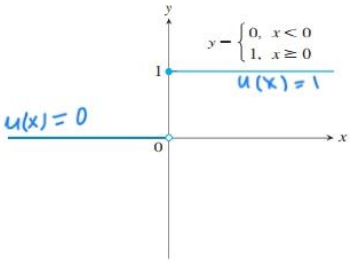
Example 5 : Draw ارسمfunctions $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

solution :

توجد دالتين :

الدالة الاولى : عندما تكون قيم xاقل من صفر فان الدالة u(x) تساوي 0 مهما كانت قيم x

الدالة الثانية : عندما تكون قيم xاكبر او مساوي صفر فان الدالة u(x) تساوي 1 مهما كانت قيم x



aseel.safi.hamzah@uomus.edu.iq shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq
Zainab.haider.obaid@uomus.edu.iq

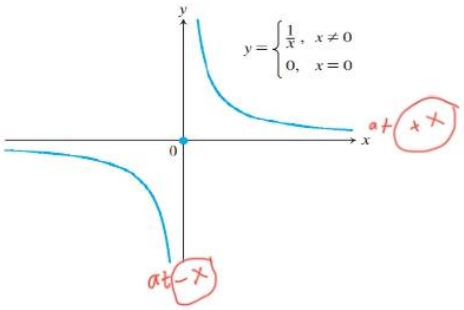
Example 6 : Draw functions $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

solution :

توجد دالتين :

الدالة الاولى : عندما تكون قيمة x لا تساوي صفر فان الدالة g(x) تساوي 1/x

الدالة الثانية : عندما تكون قيمة x تساوي صفر فان الدالة g(x) تساوي صفر



Limits Laws قوانين الغايات

اذا كانت عبارة عن جمع دالة مع دالة فان الغاية لهما تتوزع عليهما والنتيجة هو عبارة عن مجموع الغايات

اذا كانت عبارة عن دالة مضروبة في دالة فان الغايات لهما تكون حاصل ضرب الدوال. وهكذا للباقية

THEOREM 1—Limit Laws

If L, M, c, and k are real numbers and

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{and} \quad \lim_{x \to c} g(x) = M, \quad \text{then}$$

ليست حفظ فقط فهم كيفية توزيع الغايات

1. *Sum Rule:* $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Difference Rule:* $\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Constant Multiple Rule:* $\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$
4. *Product Rule:* $\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
5. *Quotient Rule:* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Power Rule:* $\lim_{x \to c}[f(x)]^n = L^n$, n a positive integer
7. *Root Rule:* $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n a positive integer

aseel.safi.hamzah@uomus.edu.iq shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq
Zainab.haider.obaid@uomus.edu.iq

Example 7 : Find the following limit: $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3)$

Solution :

$$\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3$$
$$= c^3 + 4c^2 - 3$$

HW / Find the following limits:

1. $\lim_{x\to c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ 2. $\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Infinity

Finite Limits as x $\to \pm\infty$

لا يُمثل رمز اللانهاية (∞) عددًا حقيقيًا. نستخدم ∞ لوصف سلوك الدالة عندما تتجاوز القيم في مجالها أو مداها جميع القيم المحدودة.

Example 8 : Calculate limit $\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{1}{x}\right)$

Solution

$$\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$
$$= 5 + 0 = 5$$

Example 9 : Calculate limit $\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$

Solution :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3}\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$
$$= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0$$

aseel.safi.hamzah@uomus.edu.iq shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq
Zainab.haider.obaid@uomus.edu.iq

Example 10 : Calculate limit $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$

Solution : $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)}$$

$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

نقسم على اكبر قوة (x^2)

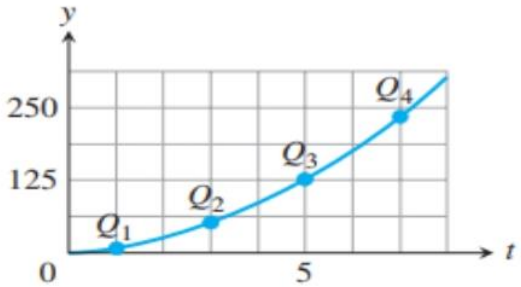
at $x = \infty \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$

HW Calculate limits:

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2 - 4} \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4}$$

Continuity Conditions

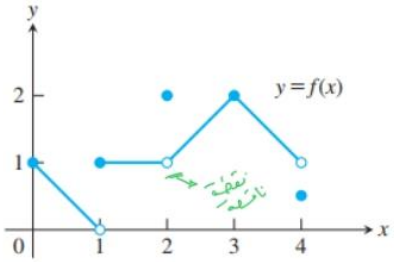
- The function values in a laboratory connected as shown in figure, the curve unbroken. مجموعة بيانات من مختبر تم رسمها وظهر شكل منحني بدون انقطاع يعني النقاط مستمرة
- This is mean continuous function دالة مستمرة
- play important role in study of calculus and its applications.
يلعب دور بالعمليات الحسابية وتطبيقاتها



aseel.safi.hamzah@uomus.edu.iq shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq
Zainab.haider.obaid@uomus.edu.iq

Example 11: which the numbers does the function f in Figure not continuous? اي من هذه الارقام تجعل الدالة غير مستمرة

Solution :



The domain (i.e x values) of the function is the closed interval [0, 4]

يعني قيم X محصورة ضمن الفترة المغلقة 0 و 4

From the figure:

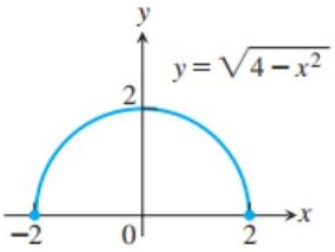
at x = 1 , (jump discontinuity انقطاع وقفز) breaks in the graph

at x = 2 (removable discontinuity انقطاع وازالة) create a new function

and x = 4 (removable discontinuity انقطاع وازالة)

Example 12 : Is the function $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ is continuous over its domain [-2,2] ?

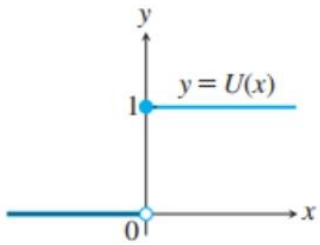
Solution : yes , it is right-continuous at x = -2, and left-continuous at x = 2.



aseel.safi.hamzah@uomus.edu.iq shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq
Zainab.haider.obaid@uomus.edu.iq

Example 13 : is the function U(x) graphed in the figure, continuous or not ?

هل الدالة U(x) مستمرة ام لا؟



Solution :

It is right-continuous at x = 0, من اليمين مستمرة $y=1,\ x\geq 0$

but in left- not continuous, it has a jump discontinuity at x = 0 $x<0,\ y=0$

من اليسار غير مستمرة هنالك قفزة من الصفر الى 1

نقطة-نقطة

aseel.safi.hamzah@uomus.edu.iq shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq
Zainab.haider.obaid@uomus.edu.iq