



تكاملات الدوال المثلثية Trigonometric Integrals

Trigonometric integrals involve algebraic combinations of the six basic trigonometric functions. تتضمن التكاملات المثلثية علاقات جبرية للدوال المثلثية الأساسية الست

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (\text{حفظ})$$

Example 1 Evaluate:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx.$$

Solution :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x \, dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \sin x \, dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \sin x \, dx \\ &= \frac{-1}{-1} \int \cos^2 x \sin x \, dx - \frac{-1}{-1} \int \cos^4 x \sin x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

Example 2 Evaluate

$$\int \cos^5 x \, dx.$$

Solution :

$$\begin{aligned} &= \int \cos^4 x \cos x \, dx \\ &= \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx = \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x \, dx \\ &= \int \cos x \, dx - \int 2\sin^2 x \cos x \, dx + \int \sin^4 x \cos x \, dx = \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + c \end{aligned}$$



Trigonometric Substitutions تعويضات الدوال المثلثية

Trigonometric substitutions occur when we replace the variable of integration by a trigonometric function. يتم التعويض عن المتغير في التكامل بدالة مثلثية معينة حسب شكل التكامل

Example 3 : Evaluate

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

Solution: substitute $x = 2 \tan u$

$$dx = 2 \sec^2 u \, du$$

الفرضية من اجل تحويل شكل $\sqrt{4+x^2}$ بالشكل $\sqrt{1+\tan^2 u}$ لان $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$ وبالتالي $\sec u = \sqrt{\sec^2 u}$

$$\int \frac{2\sec^2 u \, du}{\sqrt{4+(2\tan u)^2}} = \int \frac{2\sec^2 u \, du}{\sqrt{4+4\tan^2 u}} = \int \frac{2\sec^2 u \, du}{\sqrt{4(1+\tan^2 u)}} = \int \frac{2\sec^2 u \, du}{2\sqrt{1+\tan^2 u}}$$

$$\int \frac{2\sec^2 u \, du}{2\sqrt{\sec^2 u}} = \int \frac{\sec^2 u \, du}{\sec u} = \int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$$

Example 4: Evaluate

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

Solution :

$$\text{Let } x = \tan \theta \quad dx = \sec^2 \theta \, d\theta \rightarrow \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{1+\tan^2 \theta} = \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{\sec^2 \theta} = \int d\theta = \theta$$

$$\text{But } x = \tan \theta \rightarrow \theta = \tan^{-1} x \quad \text{then}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$$



Example 5: calculate $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Solution : substitute $x = \sin \theta$ $dx = \cos \theta \rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} = \int d\theta = \theta$ but $x = \sin \theta \rightarrow \theta = \sin^{-1} x$

Then $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$

Integration of Rational Functions by Partial Fractions

تكمال الدوال الكسرية بالكسور الجزئية

Express a rational function (a quotient of polynomials) as sum of simpler fractions, called **partial fractions**

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} dx \xrightarrow{\text{تحويل الكسر الى جزاين}} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$$\downarrow \text{تعويضها بالتكامل}$$

$$= \int \frac{A}{x+1} dx + \int \frac{B}{x-3} dx$$

حساب قيم A , B

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)} \rightarrow \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx+B}{(x+1)(x-3)}$$

$$\text{Then } 5x-3 = Ax-3A+Bx+B = Ax+Bx-3A+B$$

المعاملات متساوية للمتغير المرفوع لنفس القوة يعني $5x = Ax + Bx$ والثوابت في كلا الطرفين متساوية

$$-3 = -3A + B$$

$$A + B = 5, \quad -3A + B = -3 \longrightarrow A = 2 \text{ and } B = 3$$



The Definite integral التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Example 6 : find the integrals

1. $\int_3^1 7dx$ Solution : $= 7x \Big|_3^1 = 7 * (1 - 3) = 7 * (-2) = -14$

2. $\int_1^2 3u^2 du$ Solution : $= 3 \frac{u^3}{3} \Big|_1^2 = 3 * \left[\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right] = 3 * \frac{8-1}{3} = 7$

The basis for formulating definite integrals is the construction of approximations by finite sums. Three examples of this process:

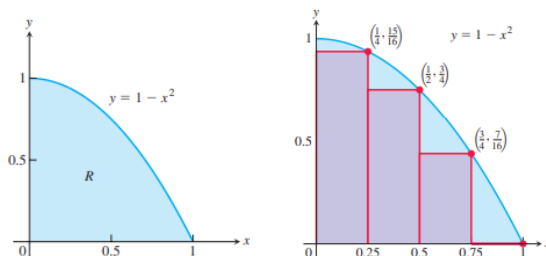
التكاملات المحددة تبني تقريبات باستخدام المجاميع المحدودة، ثلاث امثلة لهذه العملية:

- ❖ Finding the area under a graph. حساب المساحة تحت المنحنى او الرسم.
- ❖ The distance traveled by a moving object. المسافة التي يتحركها الجسم.
- ❖ The average value of a function معدل قيمة الدالة

Definite Integral applications تطبيقات التكامل المحدد

Area under the curve مساحة تحت المنحنى

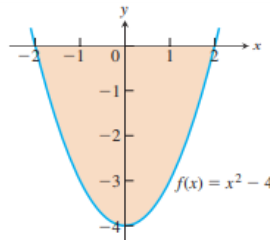
Included find the area of the shaded region R that lies above the x-axis, below the graph of $y = 1 - x^2$, and between the vertical lines $x = 0$ and $x = 1$



$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.53125.$$



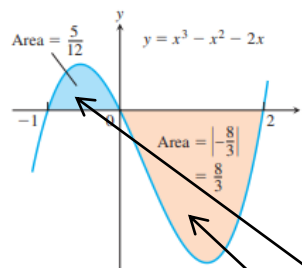
Example 7 : Compute the area between the graph and the x-axis over $[-2, 2]$, the function is $f(x) = x^2 - 4$



Solution :
$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 = \left(\frac{8}{3} - 8 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) = -\frac{32}{3}$$

المساحة تكون بالموجب حتى وان ظهرت القيمة بالسالب. يعني المساحة = $\frac{32}{3}$

Example 8: Find the total area of the region between the x-axis and the graph of $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $-1 \leq x \leq 2$



Solution :

$$\int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 = 0 - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1 \right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \left[4 - \frac{8}{3} - 4 \right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

نحسب مساحة الجزء الاول

نحسب مساحة الجزء الثاني

نجمع المساحتين لتعطي المساحة الكلية مع جعل القيم السالبة موجبة باستخدام القيمة المطلقة

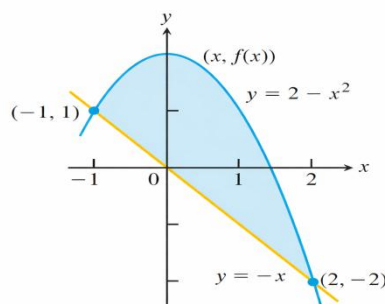
$$\text{Total enclosed area} = \frac{5}{12} + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{37}{12}$$



المساحة ما بين المنحنيات Areas Between Curves

Example 9 :

Find the area of the region enclosed by the parabola القطع المكافئ $y_1 = 2 - x^2$ and the line $y_2 = -x$



Solution :

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x + 1)(x - 2) &= 0 \\ x &= -1, \quad x = 2. \end{aligned}$$

نساوي الدالتين لمعرفة نقاط التقاطع ما بين الخط المستقيم والمنحنى من اجل معرفة نقطة البداية والنهاية للتكامل

$$\text{Area} = \int_{-1}^2 (y_1 - y_2) dx = \int_{-1}^2 [(2 - x^2) - (-x)] dx$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{-1}^2 [2 - x^2 + x] dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 = \left[2 * (2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} \right] - \left[2 * (-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} \right] \\ &= \left[4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} \right] - \left[-2 - \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{24 - 16 + 12}{6} - \frac{-12 - (-2) + 3}{6} \\ &= \frac{20}{6} - \frac{-7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$