Introduction to Indefinite Integrals, Integration Methods (u-substitution, By parts)

Introduction to Indefinite Integrals التكاملات الغير محددة

Definition

The collection of all antiderivatives of f is called the indefinite integral of f with respect to x, and is denoted by

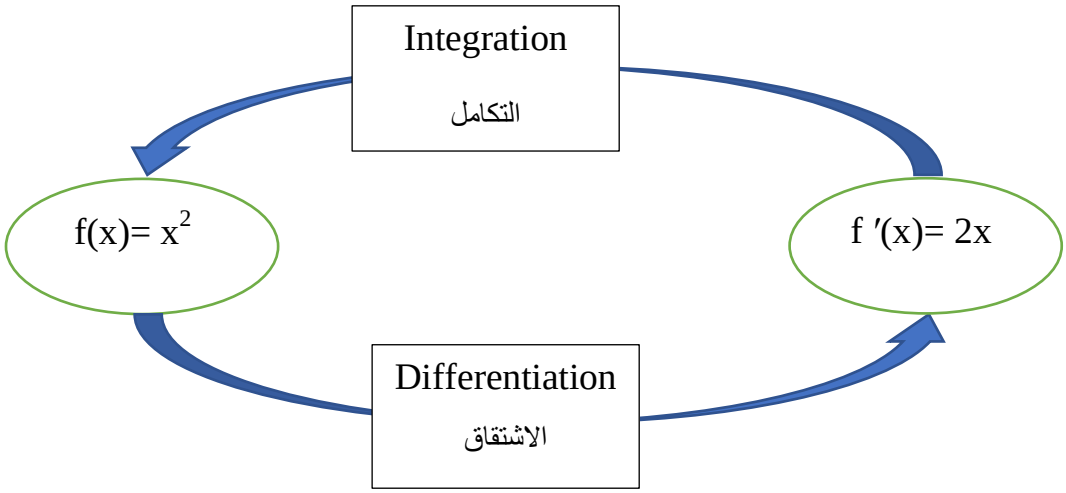
$\int f'(x)$ تُسمى مجموع الدوال الأصلية للدالة f بالنسبة إلى المتغير x ، ويُرمز لها بـ

التكامل هو عكس المشتقة فاذا كان لدينا دالة $f(x)= x^2$ فان :

$f'(x)=y'=2x$ مشتقة الدالة

$\int 2x\, dx = x^2$ تكامل الدالة التي تم اشتقاقها

فان تكامل الدالة التي تم اشتقاقها ($f'(x)$) سيعطي الدالة الاصلية ($f(x)$) كما في المخطط التالي:



Al-Mustaqbal University
Department of Computer Engineering Techniques
First stage
Subject: Mathematic 1 – UOMU
Lecturers: Dr. Aseel S. Hamzah, Shahad M. Alagha and Zainab H. Obaide
1st term – Lect **6**

$\int f(x)\,dx.$

$\int 2xdx = 2 * \frac{x^2}{2} + c$

عندما لا توجد قيم محددة في أعلى التكامل واسفله يعني التكامل غير محدد indefinite

التكامل هو اضافة +1 للقوة المرفوع لها المتغير X بالنسبة للدوال الاعتيادية والقسمة على قيمة الاس.

ناتج التكامل الغير محدد يضاف له الرمز C

Example 1 : التكامل بالنسبة للدوال المثلثية

1. If f(x)= sinx ,and f ′(x)= cosx ,find $\int f'(x)\,dx$?

Solution : $\int f'(x)dx = \int \cos x.dx = \boldsymbol{sinx} + c$

2. Find $\int \left(Sec^2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

$$\int \left(Sec^2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \int Sec^2x\,dx + \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = tanx + \frac{1}{2}\int x^{-1/2}\,dx = tanx + \frac{1}{2} * \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

=tanx +$\sqrt{x}$+c

Example 2 Evaluate اوجد the following Integrations :

1. $\int (x^2 - 2x + 5)dx$ Solution : $= \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 5x + c = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + c$
2. $\int (3t^2 + \frac{t}{2})dt$ Solution: $\int (3t^2 + \frac{t}{2})dt = 3\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} * \frac{t^2}{2} + c = t^3 + \frac{t^2}{4} + c$
3. $\int -\sec^2 \frac{3x}{2}\,dx$

من شروط التكامل وجود مشتقة داخل القوس او داخل الزاوية لذا يتم الضرب والقسمة بمشتقة داخل القوس (3/2)الغير موجودة بالمعادلة

Solution: $\int -\sec^2 \frac{3x}{2}\,dx = \frac{3/2}{3/2} \int -\sec^2 \frac{3x}{2}\,dx = -\frac{2}{3}\,tan\frac{3x}{2} + c$

بذهب مع التكامل

4. $\int \frac{2}{5} sec\theta\, tan\theta\, d\theta$ Solution: $\int \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \frac{2}{5}\sec\theta + c$

$Cos^2x+sin^2x=1$, $cos2x=cos^2x-sin^2x$, $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$ (حفظ)

Integration Methods

1) Integration by u-substitution التعويض

The Substitution rule: قانون التعويض

If the function f(u) , and u= g(x) is a differentiable function, then:

u=g(x) , and du=g′(x) . dx , f(u)=f(g(x))

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du.$$

Example 3 : find the integration $\int x\, cosx^2\, dx$

Solution: $\int cosx^2\, xdx$

Let $u=x^2$ …..(1) , and $\frac{du}{dx}=2x$, $du=2x\, dx$, $x\, dx=\frac{1}{2}du$ …..(2)

نعوض المعادلتين (1) و (2) في معادل التكامل فتصبح:

$$\int cosu\,.\frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}sinu + c = \frac{1}{2}sinx^2 + c$$

Example 4 Find the integral $\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)\, dx.$:

If the function $f(x)=(x^3+x)^5$, let $(x^3+x) = u$, then :

$f(u)=u^5$, $u= x^3+x$ ….(1) , and $\frac{du}{dx}=3x^2+1$ → $du=(3x^2+1)\, dx$…..(2)

$$\int u^5.du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(x^3+x)^6}{6} + c$$

نعود لنعوض بالمعادلة الاصلية

H W : Find the integrations :

1. $\int sin^2x\ dx$ 2. $\int x\sqrt{2x+1}$, 3. $\int sec^2(5x+1).5dx$, 4. $\int \cos(7\theta+3)\,d\theta$, 5.$\int x^2 cosx^3\ dx$

($Hint$: $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$)

2)Integration by parts التكامل بالتجزئة

عندما لا توجد مشتقة الدالة وتوجد دالة اخرى مختلفة

Integration by parts is a technique for simplifying integrals of the form: $\int u\,dv$

توجد هنالك دالة ومشتقة دالة اخرى مثل x cosx او e^x cosx يعني لا توجد مشتقة الدالة بل توجد دالة مختلفة والمطلوب التكامل لهذه الدالتين.

u → du
dv → v

الخطوة الاولى : نجعل دالة تمثل دالة اعتيادية (u) ونقوم باشتقاقها
ودالة تمثل المشتقة (dv) ونقوم بتكاملها

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

الخطوة الثانية تكوين جزأين : الجزء الاول ضرب دالتين uv
والجزء الاخر تكامل لحاصل ضرب دالة ومشتقة $\int vdu$

Example 5 : find the integration for $\int x\cos x\,dx$ by using **integration by parts**

Solution : we can be suppose ممكن ان نفترض :

u=x → du=dx دالة يتم اشتقاقها

dv=cosx dx → v=sinx دالة يتم التكامل لها

$$\int x\,cosx\,dx = u\,.v - \int v.du = \text{x . (sinx) - } \int(\text{sinx}).\ dx) * \frac{-1}{-1} = \text{x sinx- (-1) (cosx) +c}$$

$$= \text{x sinx +cosx +c}$$

الغاية من استخدام هذه الطريقة هو لإيجاد الحل الاسهل لتكامل حاصل ضرب دالتين, لا يجوز التعويض بعكس الفرضيات لأنه ستتعقد المسالة , مثلا dv=x تصبح v=x^2 يعني تصبح الدالة $\int x^2 cosx\ dx$ اكثر تعقيدا.

Example 6 Find the integrations:

1. $\int \ln x \, dx$

Solution : u=lnx du=1/x dx

dv=dx v=x

$$\int lnx\, dx = uv - \int v\, du = x\, lnx - \int x * \frac{1}{x}\, dx = xlnx - x + c$$

2. $\int x^2 e^x \, dx$

$u=x^2$ $du=2x$

$dv=e^x$ $v=e^x$ → $\int x^2 e^x \, dx = x^2\ e^x - 2\int xe^x \, dx$ .....(1)

نجري مرحلة اخرى من التكامل بنفس الخطوات
لوجود المتغير x مضروب في دالة

$\int xe^x \, dx$

$u=x$ $du=dx$

$dv=e^x$ $v=e^x$ → $\int xe^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x\ e^x - e^x$

نعوضها بالمعادلة رقم (1) فتصبح

$\int x^2 e^x \, dx = x^2\ e^x - 2(x\ e^x - e^x) + c$