



System of Linear Equations

Linear Equations

It is a collection of one or more linear equations involving the same variables—say, x_1 ; ; x_n . An example is

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Solution of the system is a list of $(s_1; s_2; \dots ; s_n)$ of numbers that makes each equation a true statement. For instance:

$(5, 6.5, 3)$ is a solution of the previous system so that substitute the values $(5, 6.5, 3)$ in x_1, x_2, x_3 makes the equation true:

حل نظام من المعادلات يكون عبارة عن مجموعة قيم $(5, 6.5, 3)$ للمتغيرات (x_1, x_2, x_3) بحيث عند تعويض هذه القيم بالمتغيرات يعطي نتيجة القيمة بالطرف الاخر, مثلا:

$$x_1=5, x_2=6.5, x_3=3$$

$$2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8 \quad \dots\dots\dots (1) \qquad x_1 - 4x_3 = -7 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$2(5) - (6.5) + 1.5(3) = 8 \qquad 5 - 4(3) = -7$$

$$10 - 6.5 + 4.5 = 8 \qquad 5 - 12 = -7$$

$$3.5 + 4.5 = 8 \qquad -7 = -7$$

$$8 = 8$$

Linear Equations Solution

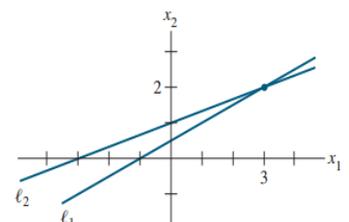
Solution set (possible solutions) for the system of linear equations has:

1. Exactly one solution, or
2. No solution, or
3. Infinitely many solution

First state: Exactly one solution

L1 equation : $x_1 - 2x_2 = -1$

L2 equation : $-x_1 + 3x_2 = 3$

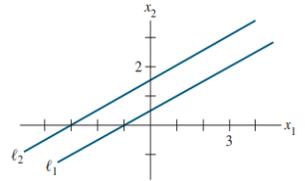




A pair of numbers $(x_1; x_2)$ that satisfies both equations is intersection point **نقطة التقاطع** for two lines, the single point $(x_1=3, x_2=2)$.

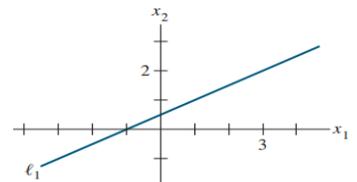
Second state: No solution

$x_1 - 2x_2 = -1$
 $-x_1 + 2x_2 = 3$ No intersection → no point satisfies both equations
 → no solution لا توجد نقاط تقاطع لذا لا توجد قيم تحقق كلا المعادلتين



Third state: Infinitely many solutions

$x_1 - 2x_2 = -1$
 $-x_1 + 2x_2 = 1$ All points satisfies both equations



جميع النقاط تحقق المعادلتان لأنها تقع بنفس الاستقامة لكلا المعادلتين.

Example 1: Find the point $(x_1; x_2)$ that lies on the line $x_1+5x_2=7$ and on the line $x_1-2x_2=2$.

Solution: subtract second equation from first equation: طرح المعادلة الثانية من الاولى

$x_1+5x_2=7$(1)

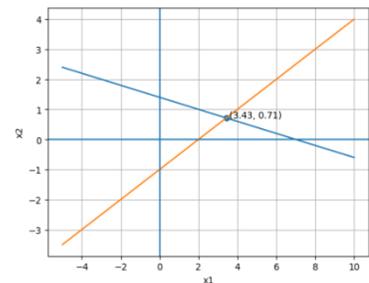
$x_1-2x_2=2$(2)

.....

$0+5x_2-(-2x_2)=7-2 \rightarrow 7x_2=5 \rightarrow x_2=5/7=0.71$ substitute in first equation →

$x_1+5*(5/7)=7 \rightarrow x_1=7-(25/7)=(49-25)/7=24/7=3.43$

→ The point of lines intersect is : $(x_1,x_2)=(3.43, 0.71)$





Matrix equations

تحويل المعادلات الى مصفوفة وحساب قيم المتغيرات (x_1, \dots, x_n) Include calculate the values of

Example 2: Solve the system:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Solution : in matrix form :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

الحل هو في تحويل الارقام داخل المثلث الى صفر من اجل ايجاد قيم X

Solution :

المعادلات الاصلية

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

نعمل على تصفير الصف الثالث واستخراج قيمة x_3

نضرب الصف الاول بـ -5 ونجمعها مع الصف الثالث
 للتخلص من x_1 في الصف الثالث

$$\begin{aligned} -5x_1 + 10x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10 \\ \hline 10x_2 - 10x_3 &= 10 \end{aligned}$$

نعوض هذه المعادلة بدل الصف الثالث في المعادلات الاصلية

للتخلص من x_2 في الصف الثالث نضرب الصف الثاني بـ -5 ونجمعها مع الصف الثالث

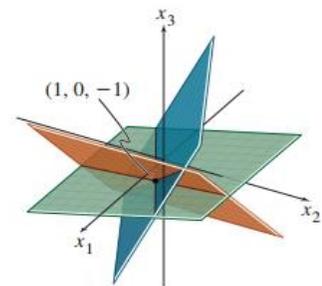
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 10x_2 - 10x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -10x_2 + 40x_3 &= -40 \\ 10x_2 - 10x_3 &= 10 \\ \hline 30x_3 &= -30 \rightarrow x_3 = -1 \end{aligned}$$

→ Substitute $x_3 = -1$ in second row → $2x_2 - 8x_3 = 8 \rightarrow 2x_2 - 8(-1) = 8 \rightarrow x_2 = 0$

Substitute $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ in first row → $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 - 2(0) + (-1) = 0 \rightarrow x_1 = 1$

Thus: Solution of the system is $(x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1)$





Existence and Uniqueness Questions

الاسئلة حول الحل الموجود والوحيد

Two fundamental questions about a linear system

- ❖ Is the system consistent (at least one solution exist)?
هل نظام المعادلات الخطية موجوداً (Consistent) (حل واحد على الأقل)
- ❖ If a solution exists, is it only one (unique solution)?
إذا كان هناك حل، فهل هو حل واحد فقط (حل وحيد)؟

In previous example, the system is consistent and unique solution because the values of x have been computed. طالما تم حساب القيم اذا النظام موجود وله حل وحيد.

Example 3: Determine if the following system is consistent

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Solution :

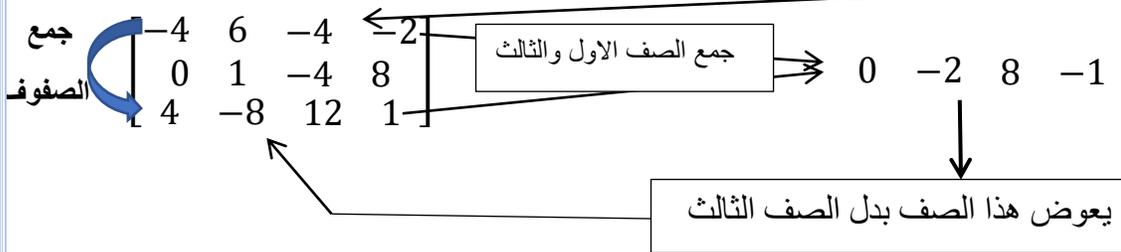
The augmented matrix is

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array} \right]$$

Interchange rows 1 and 2: لايجاد القيم نستبدل الصف الثاني بالاول حتى نكمل مثلث الاصفرار

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \text{ المعادلات الاصلية}$$

To eliminate 4 in the third equation (row 3), multiply row 1 by -2:





$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

الآن العمل على التخلص من العدد (-2) في الخطوة القادمة

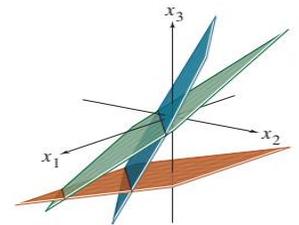
الحل يكون بضرب الصف الثاني بالعدد (2)

Multiply row 2 by 2

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & 16 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جمع الصفوف}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{يعوض هذا الصف بدل الصف الثالث}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \text{ In augmented matrix } \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 8 \\ 0 = 15 \end{cases}$$

$\rightarrow 0 = 15$ never true \rightarrow the system is inconsistent (no solution).



Example 4 Solve the system : $x_1 + 5x_2 = 7$

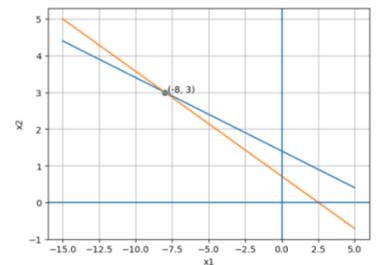
Solution : ضرب المعادلة الاولى بـ 2 $-2x_1 - 7x_2 = -5$

$$L_1 = 2x_1 + 10x_2 = 14$$

$$L_2 = -2x_1 - 7x_2 = -5$$

جمع المعادلتين.....

$$0 + 3x_2 = 9 \rightarrow x_2 = 3 \text{ substitute in eq. } L_1 \rightarrow x_1 + 5x_2 = 7 \rightarrow x_1 + 5(3) = 7 \rightarrow x_1 = -8$$



HW 3

1. Solve the systems : A. $2x_1 + 4x_2 = -4$ B. $x_2 + 4x_3 = -4$
 $5x_1 + 7x_2 = 11$ $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -2$
 $3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 6$

2. Find the point of intersection of the lines $(x_1 - 5x_2 = 1)$ and $(3x_1 - 7x_2 = 5)$.

3. Determine if the system is consistent.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \\ -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_4 = -5 \end{cases}$$