4.3 Special Matrices

a) Transpose of Matrix (A^T) المصفوفة المنقولة

وهي المصفوفة الناتجة من تحويل الصفوف الى أعمدة ويرمز لها بالرمز (A^T).

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A^T}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Properties of Transpose of Matrix:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = A^T B^T$
- $(kA)^T = kA^T$ where k is any constant

Example: If $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{7} & \mathbf{15} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Find}: \boldsymbol{A^T}, \boldsymbol{B^T}, (\boldsymbol{A+B})^T, (\boldsymbol{AB})^T, (\boldsymbol{kA})^T$ **where** $\boldsymbol{k=2}$.

Solve:

$$A^T=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

$$B^T=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = A^T B^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 10 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 & 13 \\ 39 & 11 & 45 \\ 77 & 9 & 72 \end{bmatrix}$$

$$(kA)^T = kA^T = 2\begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ 2 & 5 & 7\\ 1 & 10 & 15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -2 & -4\\ 4 & 10 & 14\\ 2 & 20 & 30\end{bmatrix}$$

b) Adjugate Matrix $(adj\ (A)\ or\ C^T)$ المصفوفة المترافقة

وهي المصفوفة التي تكون عناصرها الاعداد المترافقة للعناصر الاصلية ويرمز لها بالرمز $adj(A)$ او بالرمز C^T.

طريقة الحل:

1. نجد أولا مصفوفة العوامل المساعدة وتسمى Cofactor ويرمز لها برمز C وعناصرها هو المحدد المرافق لكل عنصر من عناصر المصفوفة الاصلية.
2. بعد إيجاد المصفوفة C نجد المصفوفة المترافقة $\text{adj}(A)$ التي تساوي منقول المصفوفة C:

$$\text{adj}(A) = C^T$$

For Example: If $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}$

$$C = \begin{bmatrix}a_{22} & -a_{21}\\ -a_{12} & a_{11}\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}+ & -\\ - & +\end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

If $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}}$

$$C = \begin{bmatrix}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^T$$

where: $\pm = (-1)^{i+j}$

Example: If $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 6\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}}$**, Find adj$(A)$.**

Solve:

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix}1 & 6\\ 4 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 6\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 5\\ 4 & 6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

c) Conjugate Matrix (A^-) المصفوفة الخيالية

- اذا كانت المصفوفة A تتكون من عناصر حقيقية فان $A = A^-$.
- اذا كانت المصفوفة A تتكون من عناصر خيالية فيجب تغيير إشارة العدد الخيالي فقط للحصول على A^-.

For Example:

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $then$ $A^- = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

If $A = \begin{bmatrix} 5 & -i \\ 1+4i & -2 \end{bmatrix}$ $then$ $A^- = \begin{bmatrix} 5 & i \\ 1-4i & -2 \end{bmatrix}$

d) Conjugate transpose Matrix (A^*)

هذه المصفوفة تساوي منقول المصفوفة الخيالية ويرمز لها بالرمز A^*.

$$A^* = [A^-]^T = [A^T]^-$$

Example: **If** $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2-i} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1+i} & \mathbf{i} & \mathbf{4-2i} \end{bmatrix}$**, Find A***.

Solve:

At first, we find conjugate matrix A^-:

$$A^- = \begin{bmatrix} 1 & -2+i & 5 \\ 1-i & -i & 4+2i \end{bmatrix}$$

then we find transpose the conjugate matrix $[A^-]^T$:

$$A^* = [A^-]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ -2+i & -i \\ 5 & 4+2i \end{bmatrix}$$

Example: if $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & 3i \\ -i & 2 & -i \\ i & 3-2i & 0 \end{bmatrix}}$, $\boldsymbol{B = \begin{bmatrix} 2i & 3i \\ -i & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}}$ **Find** $\boldsymbol{[AB]^*}$.

Solve:

$$[A]_{3\times3} \cdot [B]_{3\times2} = [AB]_{3\times2}$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & 3i \\ -i & 2 & -i \\ i & 3-2i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2i & 3i \\ -i & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = 2i \times 2i + (1+i)(-i) + 3i \times i = -6 - i$$

$$c_{12} = 2i \times 3i + (1+i)(-i) + 3i \times 0 = -5 - i$$

$$c_{21} = i \times 2i + 2 \times (-i) + (-i) \times i = -1 - 2i$$

$$c_{22} = i \times 3i + 2 \times (-i) + (-i) \times 0 = -3 - 2i$$

$$c_{31} = i \times 2i + (3-2i)(-i) + 0 \times i = -4 - 3i$$

$$c_{32} = i \times 3i + (3-2i)(-i) + 0 \times 0 = -5 - 3i$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} (-6-i) & (-5-i) \\ (-1-2i) & (-2-3i) \\ (-4-3i) & (-5-3i) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad [AB]^- = \begin{bmatrix} (-6+i) & (-5+i) \\ (-1+2i) & (-2+3i) \\ (-4+3i) & (-5+3i) \end{bmatrix}$$

$$[AB]^* = [[AB]^-]^T = \begin{bmatrix} (-6+i) & (-1+2i) & (-4+3i) \\ (-5+i) & (-2+3i) & (-5+3i) \end{bmatrix}$$

H.W: if $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & 3i \\ -i & 2 & -i \\ i & 3-2i & 0 \end{bmatrix}}$, **Find** $\boldsymbol{A^*}$.

H.W: **Find** $[\boldsymbol{A^T}]$, $[\boldsymbol{A^-}]$, $[\boldsymbol{A^*}]$ if $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 3-i & 2 & -4 \\ 14 & 9i & -7 \end{bmatrix}}$..