3. Matrices المصفوفات

المصفوفة: وهي مجموعة من العناصر المرتبة في m من الصفوف و n من الاعمدة كما ان شكل المصفوفة ممكن ان يكون مربع او مستطيل ولا قيمة لها.

The general form of matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1j} & \dots\dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots\dots & a_{ij} & \dots\dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mj} & \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

where:

m: number of rows

i: row number

n: number of columns

j: column number

4. Matrices of Types أنواع المصفوفات

a) Square Matrix: when $m = n \; or \; i = j$

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

For Example:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} , \quad A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Diagonal Matrix: is a square matrix all elements are equal zero except elements of the main diagonal (when $a_{i1} = 0 \;\; in \; all \; caces \; i \neq j$).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

For Example:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ etc.$$

c) Unit Matrix: is a square matrix which elements of the main diagonal are one and other elements are zero denoted by I.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ or \ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Symmetric Matrix: when $a_{ij} = a_{ji}$

For Example:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_{12} = a_{21} = 2 \\ a_{13} = a_{31} = 6 \\ a_{23} = a_{32} = 1 \end{Bmatrix} \quad \therefore \text{Symmetric Matrix}$$

e) Skew Symmetric Matrix: when $a_{ij} = -a_{ji}$

For Example:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \\ -6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_{12} = -a_{21} \\ a_{13} = -a_{31} \\ a_{23} = -a_{32} \end{Bmatrix} \quad \therefore \text{Skew Symmetric Matrix}$$

f) Null Matrix (Zero Matrix):

عندما تكون جميع العناصر في المصفوفة تساوي صفر

For Example:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

g) Upper Triangular Matrix

عندما تكون العناصر أسفل القطر الرئيسي تساوي صفر.

For Example:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

h) Lower Triangular Matrix

عندما تكون العناصر فوق القطر الرئيسي تساوي صفر.

For Example:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Algebraic Operations of Matrices العمليات الجبرية للمصفوفات

a) Equality عملية المساواة

لا يمكن ان تتساوى مصفوفتين الا إذا كان حجم المصفوفتين متساوي وان كل عنصر من المصفوفة الأولى مساوي الى العنصر الذي يقابله بالتسلسل من المصفوفة الثانية.

Example: check if matrix A equal to matrix B

1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$

Solve:

$$\left.\begin{matrix} a_{11} = b_{11} = 2 & a_{12} = b_{12} = 3 \\ a_{21} = b_{21} = 4 & a_{22} = b_{22} = -1 \end{matrix}\right\} \quad \therefore A = B$$

2) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

Solve:

$$\left.\begin{matrix} a_{11} = b_{11} & a_{12} = b_{12} \\ a_{21} \neq b_{21} & a_{22} = b_{22} \end{matrix}\right\} \quad \therefore A \neq B$$

b) Addition and Subtraction عملية الجمع والطرح

يتم جمع وطرح مصفوفتين فقط إذا كان حجم المصفوفتين متساوي أي لهم نفس عدد الاعمدة ونفس عدد الاسطر ويكون ناتج الجمع والطرح عبارة عن مصفوفة لها نفس الحجم.

$$[A]_{m\times n} \pm [B]_{m\times n} = [C]_{m\times n}$$

$$[A]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad [B]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$[A] + [B] = [C]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix}$$

Note:

- $(A+B)=(B+A)$
- $(A-B)=-(B-A)$

Example: Find $(\boldsymbol{A+B})$ ***and*** $(\boldsymbol{A-B})$ **if** $\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix}}$, $\boldsymbol{B=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & 1\end{bmatrix}}$

Solve:

$$A+B=\begin{bmatrix}(3+4) & (2+(-5))\\ (5+2) & (-1+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -3\\ 7 & 0\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}(3-4) & (2-(-5))\\ (5-2) & (-1-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

Example: Find $\boldsymbol{A+B}$ & $\boldsymbol{A-B}$ **if** $\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 0\end{bmatrix}}$, $\boldsymbol{B=\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\\ 5 & 10 & 12\\ 5 & 1 & -20\end{bmatrix}}$

Solve:

$$A+B=\begin{bmatrix}(5+4) & (2+3) & (3+(-1))\\ (-1+5) & (0+10) & (2+12)\\ (1+5) & (5+1) & (0+(-20))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 5 & 2\\ 4 & 10 & 14\\ 6 & 6 & -20\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}(5-4) & (2-3) & (3-(-1))\\ (-1-5) & (0-10) & (2-12)\\ (1-5) & (5-1) & (0-(-20))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ -6 & -10 & -10\\ -4 & 4 & 20\end{bmatrix}$$

c) Multiply عملية الضرب

1. **ضرب ثابت بمصفوفة:** عند ضرب أي ثابت بمصفوفة فان الثابت يضرب بجميع ارقام المصفوفة.

Example: Find $\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{A}]$ **if** $\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}}$, $\boldsymbol{k=4}$

Solve:

$$kA=4\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 12\\ 16 & 20\\ 8 & 4\end{bmatrix}$$

Example: if $\boldsymbol{k=-3,\ A=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&2\\-1&0&-2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4&0&5\\-3&1&4\\2&1&3\end{bmatrix}}$ **Find:**

$$\boldsymbol{k\,A-\frac{1}{k}B}$$

Solve:

$$kA=-3\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&2\\-1&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&-6&-3\\-12&-15&-6\\3&0&6\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{k}B=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}4&0&5\\-3&1&4\\2&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4/3&0&-5/3\\1&-1/3&-4/3\\-2/3&-1/3&-1\end{bmatrix}$$

$$k\,A-\frac{1}{k}B=\begin{bmatrix}-9&-6&-3\\-12&-15&-6\\3&0&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4/3&0&-5/3\\1&-1/3&-4/3\\-2/3&-1/3&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}(-9-(-4/3))&(-6-0)&(-3-(-5/3))\\(-12-1)&(-15-(-1/3))&(-6-(-4/3))\\(3-(-2/3))&(0-(-1/3))&(6-(-1))\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$k\,A-\frac{1}{k}B=\begin{bmatrix}-31/3&-6&-4/3\\-13&-42/3&-14/3\\11/3&1/3&7\end{bmatrix}$$

2. **ضرب مصفوفة بمصفوفة:** يتم ضرب مصفوفتين فقط عندما يكون عدد الاعمدة لأحدهما مساوي لعدد الاسطر للمصفوفة الثانية ويكون الناتج مصفوفة حجمها يساوي عدد الاسطر من الأولى والاعمدة من الثانية.

$$[A]_{m1\times n1}\cdot[B]_{m2\times n2}=[C]_{m1\times n2}\qquad If\quad n_1=m_2$$

Example: Find $\boldsymbol{AB}$ **if** $\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}2&1&-2\\4&2&-3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-2&0&-2\\5&2&4\\0&1&1\end{bmatrix}}$.

Solve:

$$[A]_{2\times3}\cdot[B]_{3\times3}=[C]_{2\times3}$$

$$[A][B]=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\end{bmatrix}$$

$c_{11} = 2 \times -2 + 1 \times 5 + (-2) \times 0 = 1$

$c_{12} = 2 \times 0 + 1 \times 2 + (-2) \times 1 = 0$

$c_{13} = 2 \times -2 + 1 \times 4 + (-2) \times 1 = -2$

$c_{21} = 4 \times -2 + 2 \times 5 + (-3) \times 0 = 2$

$c_{22} = 4 \times 0 + 2 \times 2 + (-3) \times 1 = 1$

$c_{23} = 4 \times -2 + 2 \times 4 + (-3) \times 1 = -3$

$\therefore [A][B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Example: Find AB if $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Solve:

$[A]_{2\times2} \cdot [B]_{2\times2} = [C]_{2\times2}$

$[A][B] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 24 & 30 \end{bmatrix}$

Example: Find x and y which satisfy the equation:

$$\begin{bmatrix} y & -4 & -5 \\ x & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ x & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ y & 2 \end{bmatrix}.$$

Solve:

$y \times 3 + (-4) \times x + (-5) \times 0 = 5$

$3y - 4x = 5 \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$

$x \times 3 + 0 \times x + 2 \times 0 = y$

$3x = y \quad \rightarrow \quad y = 3x \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2) sub\ in\ eq.(1)$

$3(3x) - 4x = 5 \quad \rightarrow \quad x = 1$

$\therefore y = 3x = 3 \times 1 = 3$

Example: Find $[A]^2$ if $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Solve:

$$[A]^2 = [A][A] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 8 & -2 \\ 33 & 18 & -3 \\ 32 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

H.W: Find the unknown which satisfy equation:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

H.W: Find $[A]^3$ if $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

H.W: Find $AB - 3C$ if $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 2 & -14 \end{bmatrix}$.

H.W: Find $2\,(A + B)$ if $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

H.W: if $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ Find $2A - 3B$.