4- Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients

The general form:

$$\acute{\acute{y}} + P(x)\acute{y} + Q(x)y = R(x)$$

if $R(x) = 0$ $\therefore$ Homogenous Equations معادلة متجانسة

if $R(x) \neq 0$ $\therefore$ Non-Homogenous Equations معادلة غير متجانسة

where:

$P(x)$: The function adjacent to $(\acute{y})$ when the coefficient of $\acute{\acute{y}}$ is equal to 1.

$P(x)$: هو الدالة المجاورة لل $\acute{y}$ عندما معامل $\acute{\acute{y}}$ يساوي 1.

$Q(x)$: The function adjacent to (y) when the coefficient of $\acute{\acute{y}}$ is equal to 1.

$Q(x)$: هو الدالة المجاورة لل y عندما معامل $\acute{\acute{y}}$ يساوي 1.

$R(x)$: The right side function is free from (y) and its derivatives when the coefficient of $\acute{\acute{y}}$ is equal to 1.

$R(x)$: هو الدالة في الجهة اليمنى والخالية من المتغير y ومشتقاته عندما معامل $\acute{\acute{y}}$ يساوي 1.

4.1- Homogeneous Second Order Linear Differential Equations

Theorem: if y_1 and y_2 are two solutions to the homogenous equation, then $y_c = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ is general solution for Homogenous Equations, where c_1 and c_2 are constant.

اذا كان y_1 و y_2 حلين للمعادلة التفاضلية المتجانسة فان $y_c = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ هو الحل العام لهذه المعادلة.
معادلة الحل العام هو:

$$y_c = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$$

في حالة توفر احد الحلول (y_1) نستطيع ان نحصل على الحل الثاني (y_2) من خلال هذه المعادلة:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}\, dx$$

وبالتالي يكون الحل العام لمثل هذه الحالة كما يلي:

$$\therefore y_c = c_1\, y_1 + c_2\, y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}\, dx$$

Example (1): Find the general solution if $y_1 = x^2$ is a solution of the equation:

$$x^2\, \acute{\acute{y}} + x\, \acute{y} - 4y = 0$$

Solve:

$$\left. x^2\, \acute{\acute{y}} + x\, \acute{y} - 4y = 0 \right] \div x^2$$

$$\acute{\acute{y}} + \frac{1}{x}\, \acute{y} - \frac{4}{x^2} y = 0$$

The general equation: $\acute{\acute{y}} + P(x)\acute{y} + Q(x)y = 0$

$$\therefore\ P(x) = \frac{1}{x}, \quad y_1 = x^2$$

$$\because y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{{y_1}^2}\, dx$$

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x} dx}}{x^4}\, dx = x^2 \int \frac{e^{-\ln x}}{x^4}\, dx = x^2 \int \frac{e^{\ln x^{-1}}}{x^4}\, dx$$

$$y_2 = x^2 \int x^{-1} \cdot x^{-4}\, dx = x^2 \int x^{-5}\, dx = x^2 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} = x^2 \cdot \frac{-1}{4\,x^4}$$

$$\therefore y_2 = \frac{-1}{4\,x^2}$$

$$y_c = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$$

$$y_c = c_1\, x^2 + c_2\, \frac{-1}{4\,x^2}$$

$$\therefore\ y_c = c_1\, x^2 - \frac{c_2}{4\,x^2}$$

إذا طلب في السؤال **حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية** (second order) ولم يعطيك أحد الحلول كما في الطريقة السابقة فنتبع الخطوات التالية للحل:

1. تحويل المعادلة التفاضلية بصيغة المعادلة المميزة كما يلي:

$$a\acute{\acute{y}} + b\acute{y} + cy = 0$$

$$Let\ y = e^{mx}\ , \quad \therefore \acute{y} = me^{mx}, \quad \acute{\acute{y}} = m^2 e^{mx} \quad \text{sub. in above equation}$$

$$a\, m^2 e^{mx} + b\, me^{mx} + c\, e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(a\, m^2 + b\, m + c\,) = 0$$

$\therefore a\, m^2 + b\, m + c = 0$ is called characteristic equation المعادلة المميزة

2. حل المعادلة المميزة بقانون الدستور وبالحالات التالية:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- إذا كانت الكمية تحت الجذر أكبر من الصفر (قيم موجبة) فقيم ال m ستكون قيم حقيقية وبذلك يكون الحل عبارة عن:

$$y = c_1\, e^{m_1 x} + c_2\, e^{m_2 x}$$

where:

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ , \qquad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- اذا كانت الكمية تحت الجذر تساوي صفر فان $m_1 = m_2 = m$ وبذلك يكون الطرفين متشابهين فيضرب احدهما ب x فيكون الحل عبارة عن:

$$y = c_1\, e^{mx} + c_2\, x\, e^{m\,x}$$

where:

$$m = \frac{-b}{2a}$$

- عندما تكون الكمية تحت الجذر أصغر من الصفر (كمية سالبة) فقيم ال m ستكون قيم خيالية وبذلك يكون الحل عبارة عن:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\therefore m_{1,2} = P \pm qi$$

$$y = e^{Px}(A\cos qx + B\sin qx)$$

where:

$$P = \frac{-b}{2a}, \quad q = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Example (2): Find the general solution for following differential equation:

1) $\acute{\acute{y}} + 7\,\acute{y} + 12y = 0$

2) $\acute{\acute{y}} - 6\,\acute{y} + 9y = 0$

3) $\acute{\acute{y}} + 2\,\acute{y} + 5y = 0$

4) $\acute{\acute{y}} - 4y = 0$

Solve:

1) $\acute{\acute{y}} + 7\,\acute{y} + 12y = 0$

$m^2 + 7\,m + 12 = 0$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\left[m_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} = \frac{-7 \pm 1}{2}\right] \quad \rightarrow m_1 = -3\,, \qquad m_2 = -4$$

$$y = c_1\, e^{m_1 x} + c_2\, e^{m_2 x}$$

$$y = c_1\, e^{-3x} + c_2\, e^{-4\,x}$$

Problems:

H.W: Find the general solution for following differential equation:

1) $\acute{\acute{y}} - 3\,\acute{y} + 2y = 0$

. Applications of First Order Differential Equations

حساب التسرب من الخزانات

إذا كان لدينا خزان مملوء بالماء وهذا الخزان يحتوي على ثقب فان الماء يبدأ بالتسرب خلال الزمن وبمرور الزمن يبدأ عمق الماء بالنقصان، لذلك حساب مقدار ارتفاع الماء داخل الخزان المثقوب يتغير مع الزمن ويحسب من خلال المعادلة:

$$A(y)\cdot\frac{dy}{dt}=Q_{in}-Q_{out}$$

حيث:

$A(y)$: مساحة الشريحة عند العمق y.

Q_{in}: التصريف الداخل الى الخزان.

Q_{out}: التصريف الخارج من الخزان ويحسب من خلال المعادلة التالية:

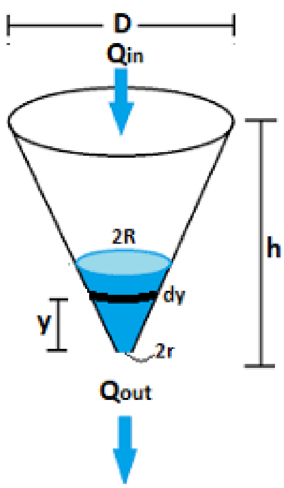
$$Q_{out}=\pi\, r^2\sqrt{2gy}$$

حيث:

r: نصف قطر الفتحة التي يتسرب منها الماء.

g: التعجيل الأرضي ويساوي $9.81\ m/sec^2$.

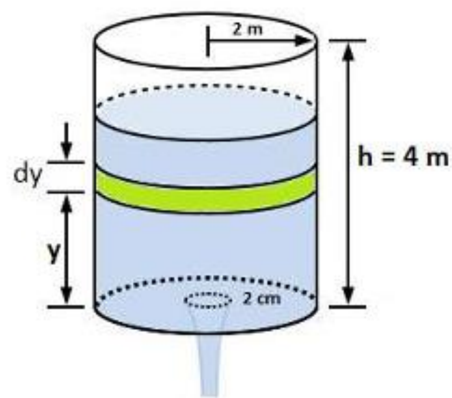
y: بعد الشريحة من الفتحة (مقدار تغيرارتفاع الماء مع الزمن)



Example (2): **A cylindrical tank with radius (2m) and height of (4m) has initially filled with water. In the bottom of the tank, there is a hole of diameter (2 cm) through which the water drains under the influence of gravity. Find:**

1. **The depth of the water in the tank at any time t.**
2. **The time to reach the height of water 1 m.**
3. **The time to empty the tank.**

Solve:



1.

$$A(y)\cdot\frac{dy}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$

$A(y) = \pi\cdot 2^2$ مساحة الشريحة ثابتة

$$Q_{in} = 0$$

$$Q_{out} = \pi\, r^2\sqrt{2gy}$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{2\times 10^{-2}}{2} = 0.01\, m$$

$$\therefore \pi\cdot 2^2\cdot\frac{dy}{dt} = 0 - \pi\, 0.01^2\sqrt{2\times 9.81\, y}$$

$$4\, dy = -\,4.427\times 10^{-4}\sqrt{y}\cdot dt \qquad re-arrengement$$

$$\frac{4}{\sqrt{y}}dy = -\,4.427\times 10^{-4}\cdot dt$$

$$\int 4\, y^{-1/2}\, dy = \int -\,4.427\times 10^{-4}\cdot dt$$

$$4\frac{y^{1/2}}{1/2} = -\,4.427\times 10^{-4}\, t + c$$

$$8\sqrt{y} = -\,4.427\times 10^{-4}\, t + c$$

$Apply\ boundary\ condition: at\ t = 0 \qquad y = h = 4$

$8\sqrt{4} = -\,4.427 \times 10^{-4}\ \times 0 + c \qquad \rightarrow \qquad c = 16$

$\therefore\ 8\sqrt{y} = -\,4.427 \times 10^{-4}\ t + 16 \qquad at\ any\ time$

2. The time to reach the height of water 1 m.

$at\ y = 1\ m \quad \rightarrow \qquad 8\sqrt{1} = -\,4.427 \times 10^{-4}\ t + 16 \quad \rightarrow$

$t = 18070.9\ sec$

3. The time to empty the tank.

The time to empty the tank at $y = 0$:

$8\sqrt{0} = -\,4.427 \times 10^{-4}\ t + 16 \qquad \rightarrow \qquad t = 36141.8\ sec$

H.W: A conical tank with diameter (3 m) from top and (5 m) depth, initially filled with water. At the bottom of the tank, there is a hole of radius (0.02 m). Find the depth of the water in the tank at any time t, and how long it will take the tank to empty.