Al-Mustaqbal University / College of Engineering
Prosthetics & Orthotics Eng. Department
Third Class
Subject (Engineering Analysis)
Code (UOMU0103057)
Asst. Lec. Shahad M. Alagha
1st term – Lecture 6: Mathematical Modeling.

Mathematical Modling

عندما نريد حل مسألة هندسية يجب اولاً صياغتها رياضياً باستخدام متغيرات ودوال ومعادلات تسمى الموديل أو النموذج الرياضي .

اولاً لازم نعرف المعادلات التفاضلية على نوعين :-

* ordinary differential eq. (ODE)

هي معادلة تحتوي على مشتق واحد أو أكثر لدالة مجهوله -

Ex :

$$y' = \cos x$$

$$y'' = 9y + e^{-2x}$$

$$y''' - y'^2 = 0$$

* partial differential eq (PDE)

هي معادلات تحتوي على مشتقات جزئية لداله مجهولة تعتمد على أكثر من متغير واحد

$$f(x, y) \quad , f(x, y, z)$$

$$f(x, y) = f'_y + f'_x$$

* Modeling :-

النمذجة الرياضية هي عملية تحويل مشكلة من الواقع (هندسة، فيزياء، اقتصاد ....) إلى صيغة رياضية باستخدام متغيرات، دوال، معادلات

الخطوات :-

① فهم الظاهرة الحقيقية :- تزايد أو تناقص

② صياغة النموذج الرياضي :- نستخدم القوانين الرياضية ونحولها معادلة تفاضلية

③ حل النموذج الرياضي [نشتق الدالة]

④ تعويض القيم المعطاة في السؤال

* first-order ODEs.

$$F(x, y, y') = 0$$

or

$$y' = f(x, y)$$

Ex1:- verify that $y = \frac{c}{x}$ is a solution of the ODE $xy' = -y$ for all $x \neq 0$

$y = \frac{c}{x} \Rightarrow y' = \frac{-c}{x^2}$ Multiply this by x

$\Rightarrow xy' = \frac{-c}{x} = -y$

$\therefore$ that given ODE.

* Exponential Growth and Exponential Decy

Ex 2 :- let $p(t)$ to be a quality that increases with time(t) and the rate of increase:

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \text{(growth)}$$

Solution :-

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = k\,dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = k \int dt$$

$$\Rightarrow \ln y = kt + c$$

$$y = e^{kt+c} = e^{kt} \cdot e^{c} \qquad \text{let } e^{c} = c_1$$

$$\therefore y(t) = c_1 e^{kt} \qquad y_0 = c_1$$

Ex 3 :- let $p(t)$ to be a quality that decrease with time and the rate of decrease. (Decy)

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

Solution :-

$$\frac{dy}{dt} = -ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = -k\,dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = k \int dt$$

$$\Rightarrow \ln y = -kt + c$$

$$y = e^{-kt+c} = e^{-kt} \cdot e^{c} \qquad \text{let } e^{c} = c_2$$

$$\therefore y(t) = c_2 e^{-kt}$$

Email (shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq)

* Initial Value Problem

$y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$ القيمة الابتدائية

Ex 4 // solve the initial value $\boxed{y' = \frac{dy}{dt} = 3y}$ $\boxed{y(0) = 5.7}$

$\frac{1}{y} dy = 3 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = 3 \int dx$

$\ln y = 3x + c \Rightarrow y = e^{3x + c} = e^{3x} \cdot e^{c}$

$\therefore y(x) = c_1 e^{3x}$ let $e^{c} = c_1$

at $x = 0 \Rightarrow \underline{y_0} = c_1 e^{0} = 5.7$

$\therefore \underline{c_1} = 5.7$

$\therefore y(x) = 5.7 e^{3x}$

Ex5// Radioactive Decay, initial amount 0.5g

Decay rate :- $\frac{dy}{dt} = -ky$, $y(0) = 0.5$

$\frac{1}{y} dy = -k\, dt$

⋮

$\therefore y(t) = C_2 e^{-kt}$

at initial amount $y(0) = 0.5 = C_2 e^{0} \Rightarrow C_2 = 0.5$

$\therefore y(t) = 0.5\, e^{-kt}$

Ex6// Derivation of the Half-Life Formula

$t = t_{1/2}$

from the exponential decay $y(t) = y_0 e^{-kt}$

$y(t_{1/2}) = \frac{1}{2} y_0$

$y(t_{1/2}) = y_0 e^{-kt_{1/2}}$

$\therefore \cancel{y_0} e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2} \cancel{y_0}$ $\quad y_0 \neq 0$

$e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$

$\ln(e^{-kt_{1/2}}) = \ln(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow -kt_{1/2} = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$

$\therefore Kt_{1/2} = \ln 2$

$\therefore t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{K}$ or $K = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$

for Example the half-life in 10 years

$K = \dfrac{\ln 2}{10} \simeq 0.0693$ per year

to verification :-

$y(t_{1/2}) = y_0 e^{-kt_{1/2}} = y_0 e^{-\ln 2} = y_0 \cdot \dfrac{1}{2}$

Email (shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq)