Curl and Divergence.

الدوران و التباعد

* **Curl** :- هو مقياس لمدى دوران أو التفاف المجال المتجه حول نقطة معينة

$$\vec{F} = (R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{K}$$

* اذا كان الـ Curl كبير يعني أن المجال يعمل حركة دائرية قوية حول تلك النقطة
* اذا كان الـ Curl يساوي صفر يعني انه لا يوجد دوران في المجال المتجه .

$$\text{Curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad \text{gradint Vector}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

Notes:-

① اذا كانت $f(x, y, z)$ دالة جزئية مستمرة من الدرجة الثانية فأن $\text{curl } \nabla f = \vec{0}$

② اذا كان $\vec{F}$ معتدل (conservative vector field) فأن $\vec{F}\text{curl} = \vec{0}$

③ اذا كان $\vec{F}$ معرفاً على كامل R^3 ومكوناته لها مشتقات أول مستمرة فأن $\vec{F} = \vec{0}$
و هو معتدل (conservative vector field)

Email (shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq)

* **Divergence** :-

هو مقياس لمدى انتشار أو تجمع خطوط المجال عند نقطة معينة

* اذا كان موجب يعني أن المجال يخرج من النقطة (مثل مصدر)
* اذا كان سالب يعني أن المجال يتجه نحو النقطة (مثل مصرف)
* اذا كان يساوي صفر يعني انه لا يوجد انتشار ولا تجميع (تدفق محفوظ)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{div}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

∇ : Del operator

Gradiant $= \nabla f$ مشتقات لدالة
Curl $= \nabla \times \vec{F}$ دوران اتجاهي
Divergence $= \nabla \cdot \vec{F}$ دوران نقطي

- Relation Ship between the curl and te divergence :-

$$\text{div}\,(\text{curl}\,\vec{F}) = 0$$

EX1// $\vec{F} = x^2y\,\vec{i} + xyz\,\vec{j} - x^2y^2\,\vec{k}$

Determine if $\vec{F}$ is a conservative sector field

نحسب curl ونشوف اذا كان يعطينا zero vector أو لا

$$\text{Curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & xyz & -x^2y^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} P & Q & R \end{matrix}$$

$\frac{\partial R}{\partial y} = -2x^2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = xy \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial R}{\partial x} = -2xy \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = yz \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2$

$$= (-2x^2y - xy)\vec{i} - (-2xy - 0)\vec{j} + (yz - x^2)\vec{k}$$

$$= -2x^2y\,\vec{i} - xy\,\vec{i} - (-2xy)\,\vec{j} + yz\,\vec{k} - x^2\vec{k} \neq 0$$

$\therefore$ The curl isn't zero vector so in not conservative

Ex2// Compute $\text{div}\vec{F}$ for $\vec{F} = x^2y\,i + xyz\vec{j} - x^2y^2\vec{k}$

$$\text{div}.\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2y^2)$$

$$= 2xy + xz + 0$$

Ex3// verify the fact of relationship between the curl and divergence for the vector field $\vec{F} = yz^2\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$.

$$\text{Curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & xy & yz \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array}$$

$\frac{\partial R}{\partial y} = z$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 2zy$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = z^2$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= (z - 0)\vec{i} - (0 - 2zy)\vec{j} + (y - z^2)\vec{k}$$

$$= z\vec{i} + 2zy\vec{j} + (y - z^2)\vec{k}$$

$$\text{div}(\text{curl}\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(2zy) + \frac{\partial}{\partial z}(y - z^2)$$

$$= 0 + 2z - 2z = 0$$

Tangent planes and Normal Lines

السطوح المماسية tangent plane

السطح المماسي هو السطح الذي يلمس سطحاً معيناً عند نقطة محددة من دون أن يقطعه بالقرب من تلك النقطة.

In the first :-

- The eq. of the planes $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
- The gradient vector $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$

So the tangent plane to the surface given by -
$f(x,y,z)=K$ at (x_0,y_0,z_0)

∴ The eq. of Tangent plane

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+$$
$$f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

الخطوط العمودية Normal Lines

الخط العمودي هو خط مستقيم يخرج من النقطة نفسها على السطح ويكون عمودياً متعامداً على السطح المماسي

The eq. of normal line :-

$$\vec{r}(t)=\langle x_0,y_0,z_0\rangle + t\nabla f(x_0,y_0,z_0)$$

Ex 1// Find the tangent plane and normal line to $x^2+y^2+z^2=30$ at the point $(1,-2,5)$

$\nabla f = 2x + 2y + 2z$

$\nabla f(1,-2,5) = (2,-4,10)$

tangent plane

$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$

$2(x-1) - 4(y+2) + 10(z-5) = 0$

normal line :-

$\vec{r}(t) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\nabla f(x_0,y_0,z_0)$

$\vec{r}(t) = \langle 1,-2,5 \rangle + t\langle 2,-4,10 \rangle$

$\vec{r}(t) = \langle 1+2t, -2-4t, 5+10t \rangle$

Exercises :-

1: find $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$:- $x^3 z^2 - 5xy^5 z = x^2 + y^3$

2: find Domin and skitch

a/ $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

b/ $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{y^2-x^2}$

3: $D_{\vec{u}} f(3,-1,0)$ for $(x,y,z) = 4x - y^2 e^{3xz}$

4: Compute $\text{div}\,\vec{F}$ and $\text{Curl}\,\vec{F}$

for $\vec{F} = x^2 y\,\vec{i} - (z^3 - 3x)\,j + 4y^2\,\vec{k}$

5: Determine if the following vector field is conservative.

$\vec{F} = 6x\,\vec{i} + (2y - y^2)\,\vec{j} + (6z - x^3)\,\vec{k}$

6: find the tangent plane and normal line

$x^2 y = 4ze^{x+y} - 35$ at $(3,-3,2)$

Email (shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq)

Lecture 4 Partial Differentiation:

Function of two or more variables, Partial derivatives, Directional derivative, Applications of Partial Derivatives:

Gradient, divergence, curl, Tangent plane and normal line

Email (shahad.mahmood.mohammed@uomus.edu.iq)