✓ معاملات الصف الثاني الجديد = معاملات الصف الثاني القديم S_2 – الرقم الذي يقع في تقاطع هذا الصف مع العمود الرئيسي وهو (3) × معاملات الصف الرئيسي الجديد R_3

$New\ R_2 = Old\ R_2 - 3 \times New\ R_3$

➔ $Old\ R_2 =$	3	2	0	1	0	14
$-3 \times New\ R_3 =$	−3	3	0	0	−3	−9
+						
$New\ R_2 =$	0	5	0	1	−3	5

صف٢ الجديد في الجدول الثاني

✓ معاملات صف Z الجديد = معاملات الصف الرابع القديم Z – الرقم الذي يقع في تقاطع هذا الصف مع العمود الرئيسي وهو (−3) × معاملات الصف الرئيسي الجديد R_3

$New\ R_4 = Old\ R_4 - (-3) \times New\ R_3$ ➔ $New\ R_4 = Old\ R_4 + 3 \times New\ R_3$

➔ $Old\ R_4 =$	−3	−2	0	0	0	0
$3 \times New\ R_3 =$	3	−3	0	0	3	9
+						
$New\ R_4 =$	0	−5	0	0	3	9

صف٤ الجديد في الجدول الثاني

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

All / B.V.	X_1	X_2 ↓	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	0	1	1	0	1	7	7
← S_2	0	5	0	1	−3	5	1
X_1	1	−1	0	0	1	3	يهمل
Z	0	−5	0	0	3	9	

إن قيمة دالة الهدف $Z = 9$ وقيم المتغيرات الأساسية $S_1=7$ و $S_2=5$ و $X_1=3$ أما قيم المتغيرات غير الأساسية هي $S_3=0$ و $X_2=0$، ونكمل العمليات المحورية ليتكون لدينا جدول الحل الأساسي المقبول الثالث التالي بسبب وجود قيم سالبة في صف Z وهذا يدل على إمكانية تحسين قيمة Z ب 5 وحدات نقدية لكل قيمة جديدة إلى X_2، ونحدد المتغير الداخل الذي يملك أكبر قيمة سالبة في صف Z وهو X_2 ومعامله (5−)، ونحدد المتغير الخارج الذي يملك أقل نسبة حاصل قسمة (Ratio=1) وهو S_2.

أما العمليات المحورية اللازمة للانتقال من الجدول الثاني إلى الثالث فهي بالشكل التالي:

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج S_2 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_2):

New R_2 = Old $R_2 \div 5$ (Pivot no.)

$= \frac{0}{5} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{0}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{-3}{5} \quad \frac{5}{5}$

$= 0 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{-3}{5} \quad 1$ ➔ عناصر الصف الثاني الجديد

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

New R_1 = Old $R_1 - 1 \times$ New R_2

➔ Old $R_1 = 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 7$

− New $R_2 = 0 \quad -1 \quad 0 \quad \frac{-1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad -1$

\+ -----------------------------

New $R_1 = 0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{-1}{5} \quad \frac{8}{5} \quad 6$ صف ١ الجديد في الجدول الثالث

New R_3 = Old $R_3 - (-1) \times$ New R_2 ➔ New R_3 = Old R_3 + New R_2

➔ Old R_3 =	1	−1	0	0	1	3
New R_2 =	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{-3}{5}$	1
+						
New R٣ =	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	4 صف٣ الجديد في الجدول الثالث

New R_4 = Old $R_4 - (-5) \times$ New R_2 ➔ New R_4 = Old R_4 + $5\times$New R_2

➔ Old R_4 =	0	−5	0	0	3	9
$5\times$New R_2 =	0	5	0	1	−3	5
+						
New R_4 =	0	0	0	1	0	14 صف٤ الجديد في الجدول الثالث

جدول الحل الأساسي المقبول الثالث (الأمثل)

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
S_1	0	0	1	−1/5	8/5	6
X_2	0	1	0	1/5	−3/5	1
X_1	1	0	0	1/5	2/5	4
Z	0	0	0	1	0	14

من الجدول الثالث أعلاه نُلاحظ أن جميع قيم صف Z موجبة أو صفرية وهذا دليل على وصولنا للحل الأمثل وليس هناك تحسن يرجى من الاستمرار بالحل، لهذا يدعى جدول الحل الأساسي المقبول الثالث بجدول الحل الأمثل، وأن الحل الأمثل هو (Max. Z=14) وأن قيم متغيرات القرار تساوي $X_1=4$ و $X_2=1$ وهناك فائض لم يُستغل في القيد الأول مقدارة $S_1=6$.

مثال (٢-١٩): أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام الطريقة العامة (Simplex).

Min. $Z= -5X_1 - 3X_2 + 2X_3$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + X_3 \le 5$$
$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 \le 4$$
$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 \le 15$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \ge 0$$

الحل:

Min. $Z= -5X_1-3X_2+2X_3+0S_1+0S_2+0S_3$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 5$$
$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 + S_2 = 4$$
$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + S_3 = 15$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 5$$
$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 + S_2 = 4$$
$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + S_3 = 15$$
$$Z+5X_1+3X_2-2X_3+0S_1+0S_2+0S_3=0$$

جدول الحل الأساسى المقبول الأول

B.V. \ All	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	1	1	1	1	0	0	5	5/1=5
S_2	1	−2	−2	0	1	0	4	4/1=4
S_3	3	3	2	0	0	1	15	15/3=5
Z	5	3	−2	0	0	0	0	

أن الحل الأساسي المقبول للجدول الأولي هو $Z=0, S_1=5, S_2=4, S_3=15, X_1=0,$ $X_2=0, X_3=0$ ولأنه هنالك قيم موجبة في صف Z لهذا نختار أكبر رقم موجب ليصبح متغيرهُ هو المتغير الداخل وهو X_1 (يقابل أكبر رقم موجب في صف Z وهو 5)، وذلك لأن دالة الهدف من نوع Min والخارج S_2 (يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 4) ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثاني.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج S_2 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_1):

$$\text{New } R_2 = \text{Old } R_2 \div 1$$

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

$$\text{New } R_1 = \text{Old } R_1 - 1 \times \text{New } R_2$$

$$\text{New } R_3 = \text{Old } R_3 - 3 \times \text{New } R_2$$

$$\text{New } R_4 = \text{Old } R_4 - 5 \times \text{New } R_2$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
\Rightarrow \text{Old } R_4 = & 5 & 3 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-5\times\text{New } R_2 = & -5 & 10 & 10 & 0 & -5 & 0 & -20 \\
+ & \multicolumn{7}{l}{\text{-----------------------------------}} \\
\text{New } R_4 = & 0 & 13 & 8 & 0 & -5 & 0 & -20
\end{array}$$

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

B.V. \ All	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS	Ratio
S_1	0	3	3	1	−1	0	1	1/3
X_1	1	−2	−2	0	1	0	4	يهمل
S_3	0	9	8	0	−3	1	3	1/3
Z	0	13	8	0	−5	0	−20	

أن الحل الأساسي المقبول للجدول الثاني هو $Z=-20, S_1=1, X_1=4, S_3=3, X_2=0, X_3=0, S_2=0,$ ولأنه هنالك قيم موجبة في صف Z لهذا نختار أكبر رقم موجب ليصبح متغيرهُ هو المتغير الداخل وهو X_2 (يقابل أكبر رقم موجب في صف Z وهو 13) والخارج S_1 (يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 1/3) ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثالث.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج S_1 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_2):

New R_1 = Old $R_1 \div 3$

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

New R_2 = Old $R_2 - (-2) \times$ New R_1

New R_3 = Old $R_3 - 9 \times$ New R_1

New R_4 = Old $R_4 - 13 \times$ New R_1

جدول الحل الأساسي المقبول الثالث (الأمثل)

All / B.V.	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
X_2	0	1	1	1/3	−1/3	0	1/3
X_1	1	0	0	2/3	1/3	0	14/3
S_3	0	0	−1	−3	0	1	0
Z	0	0	−5	−13/3	−2/3	0	−73/3

من الجدول الثالث أعلاه نُلاحظ أن جميع قيم صف Z سالبة أو صفرية وهذا دليل على الوصول للحل الأمثل وليس هناك تحسن يرجى من الاستمرار بالحل، وأن الحل الأمثل هو ($Min.\ Z= -73/3 = -24.33$) وأن قيم متغيرات القرار تساوي $X_1=14/3= 4.67$ و $X_2= 1/3= 0.33$ و $S_3=0$.

مُلاحظة (٢–١٠): عندما تتساوى قيم حاصل القسمة في عمود (Ratio) لتحديد المتغير الخارج، فإن ذلك سيجعل قيمة المتغير (الذي لم يخرج) في عمود (RHS) مساوية للصفر في الجدول اللاحق لهذهِ الخطوة، وهذا ما شاهدناه في جدول الحل الأمثل للمتغير الأساسي $S_3=0$.

مُلاحظة (٢–١١): تستخدم المتغيرات الصناعية (Artificial Variables) في حالة وجود على الأقل قيد واحد في المسألة بشكل (≥) أو (=)، وذلك لتحقيق شرط الابتداء بالحل وهو توفر المصفوفة الأحادية كشرط للحل الأساسي الأولي المقبول، إذ تضاف هذه

المتغيرات إلى القيود من هذا النوع ويرمز لهذه المتغيرات بـ R_i ، حيثُ $R_i \geq 0$ وتعامل مثل ما تم معاملة المتغيرات الوهمية.

يوجد أسلوبان لحل مسائل البرمجة الخطية من هذا النوع هي:

أ) أسلوب M الكبيرة Big M–Technique

ب) طريقة السمبلكس ذات المرحلتين Two–Phase Simplex Method

٢-٨-٢ أسلوب M الكبيرة Big–M Technique

يتم بهذا الاسلوب إضافة المتغيرات الاصطناعية R_i إلى القيود من نوع ($\geq$) أو (=)، ثم تضاف هذه المتغيرات إلى دالة الهدف بمعامل (M–) إذا كانت دالة الهدف .Max وبمعامل (M+) إذا كانت .Min، إذ أن (M) يمثل عدد موجب كبير جداً وقد يدعى بكلف الجزاء (Penalty Cost) حيث ($M\rightarrow\infty$)، ولهذا السبب قد يسمى هذا الأسلوب باسلوب الجزاء[1].

مثال (٢-٢٠): أوجد الحل الأمثل باسلوب (Big–M) لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

Max. $Z= 5X_1 + 2X_2$

Sub. to

$X_1 + X_2 \leq 10$

$X_1 = 5$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحل: يتم تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الوهمية والإصطناعية:

---

(1) **Ibid**, p. 104.

Max. $Z = 5X_1 + 2X_2 + 0S_1 - MR_2 \rightarrow Z - 5X_1 - 2X_2 + 0S_1 + MR_2 = 0$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + S_1 = 10$$

$$X_1 + R_2 = 5$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , R_2 \geq 0$$

إن من شروط الصيغة القياسية أن يكون كل متغير أساسي معامله (1+) في معادلة وأصفار في بقية المعادلات، هذا الامر متحقق مع المتغير (S_1) حيث معامله (1+) في القيد الأول ومعاملاته أصفار في دالة الهدف والقيد الثاني، أما المتغير (R_2) فمعامله (1+) في القيد الثاني وصفر في القيد الأول أما في دالة الهدف فمعامله (M+)، ولجعل القيمة الأخيرة صفراً فيتم ضرب القيد الثاني بالقيمة (M−) ونجمع هذا القيد مع دالة الهدف القديمة لنحصل على دالة الهدف الجديدة الآتية:

$$Z - 5X_1 - 2X_2 + 0S_1 + MR_2 = 0$$

$$- MX_1 \qquad - MR_2 = -5M$$

$$Z + (-M-5)X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 0R_2 = -5M$$

نضع معادلة دالة الهدف الجديدة في صف Z في جدول الحل الأساسي المقبول الأول الآتي:

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	R_2	RHS	Ratio
S_1	1	1	1	0	10	10
R_2	1	0	0	1	5	5
Z	−M−5	−2	0	0	−5M	

المتغير الداخل للحل هو X_1 الذي يقابل أكبر قيمة سالبة إلى M في صف Z وهي (−M−5) لأن دالة الهدف من نوع .Max، والخارج R_2 الذي يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 5، ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثاني.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج R_2 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_1):

New Row_2 = Old $\text{Row}_2 \div 1$

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

New Row_1 = Old $\text{Row}_1 - 1 \times$ New Row_2

New Row_3 = Old $\text{Row}_3 - (-M-5) \times$ New Row_2

➔ Old Row_3 =	−M−5	−2	0	0	−5M
(M+5)×New Row_2 =	M+5	0	0	M+5	5M+25
+					
New Row_3 =	0	−2	0	M+5	25

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	R_2	RHS	Ratio
S_1	0	1	1	−1	5	5
X_1	1	0	0	1	5	يهمل
Z	0	−2	0	5+M	25	

جدول الحل الأساسي المقبول الأمثل

All / B.V.	X_1	X_2	S_1	R_2	RHS
X_2	0	1	1	−1	5
X_1	1	0	0	1	5
Z	0	0	2	3+M	35

نتوقف لأن جميع قيم صف Z موجبة أو أصفار ولا نتوقع وجود تحسن في قيمة دالة الهدف، وأن الحل الأمثل هو $X_2=5$, $X_1=5$ و Max. Z=35 .

مُلاحظة (٢-١٢): يجب أن تكون قيمة R_i مساوية للصفر في جدول الحل الأمثل، أما إذا كانت قيمتها موجبة فإن الحل غير مقبول.

مثال (٢-٢١): أوجد الحل الأمثل باسلوب Big-M لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{Min. } Z = 4X_1 + X_2$$

Sub. to

$$3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

$$\text{Min. } Z = 4X_1 + X_2 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2$$

$$\Rightarrow \ Z - 4X_1 - X_2 + 0S_2 + 0S_3 - MR_1 - MR_2 = 0$$

Sub. to

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 4$$
$$X_1 , X_2 , S_2 , S_3 , R_1, R_2 \geq 0$$

نُلاحظ إن شروط الصيغة القياسية غير متحققة مع المتغيرين الأساسيين R_1 و R_2 لأن معاملاتهما في دالة الهدف هي (M-) وليست صفر، ولكي نجعلها صفراً يتم ضرب القيد الأول والثاني بالقيمة (M+) ونجمعهما مع دالة الهدف القديمة لنحصل على دالة الهدف الجديدة الآتية:

$$\begin{array}{l}
Z - 4X_1 - X_2 + 0S_2 + 0S_3 - MR_1 - MR_2 = 0 \\
\quad 3MX_1 + MX_2 + MR_1 = 3M \\
\quad 4MX_1 + 3MX_2 - MS_2 + MR_2 = 6M \\
\hline
Z + (7M-4) X_1 + (4M-1) X_2 - MS_2 + 0S_3 + 0R_1 + 0R_2 = 9M
\end{array}$$

نضع معادلة دالة الهدف الجديدة في صف Z في جدول الحل الأساسي المقبول الأول الآتي:

جدول الحل الأساسي المقبول الأول

All / B.V.	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	RHS	Ratio
R_1	3	1	0	0	1	0	3	1
R_2	4	3	−1	0	0	1	6	3/2
S_3	1	2	0	1	0	0	4	3
Z	7M−4	4M−1	−M	0	0	0	9M	

المتغير الداخل للحل هو X_1 الذي يقابل أكبر قيمة موجبة إلى M في صف Z وهي (7M−4) لأن دالة الهدف من نوع .Min، والخارج R_1 الذي يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 1، ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثاني.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج R_1 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_1):

$$\text{New Row}_1 = \text{Old Row}_1 \div 3$$

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

$$\text{New Row}_2 = \text{Old Row}_2 - 4 \times \text{New Row}_1$$
$$\text{New Row}_3 = \text{Old Row}_3 - 1 \times \text{New Row}_1$$
$$\text{New Row}_4 = \text{Old Row}_4 - (7M-4) \times \text{New Row}_1$$

جدول الحل الأساسي المقبول الثاني

B.V. \ All	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	RHS	Ratio
X_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1	3
R_2	0	5/3	−1	0	−4/3	1	2	6/5
S_3	0	5/3	0	1	−1/3	0	3	9/5
Z	0	$\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$	−M	0	$-\frac{7}{3}M+\frac{4}{3}$	0	2M+4	

المتغير الداخل هو X_2 الذي يقابل أكبر قيمة موجبة إلى M في صف Z وهي ($\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$)، والخارج R_2 الذي يقابل أقل حاصل قسمة في عمود Ratio وتساوي 6/5، ونكمل العمليات المحورية التالية للحصول على الجدول الثالث.

- معادلة تعديل الصف الرئيسي (صف المتغير الخارج R_2 الذي يستبدل بالمتغير الداخل X_2):

$$\text{New Row}_2 = \text{Old Row}_2 \div \frac{5}{3}$$

- معادلات تعديل باقي الصفوف:

$$\text{New Row}_1 = \text{Old Row}_1 - \frac{1}{3} \times \text{New Row}_2$$

$$\text{New Row}_3 = \text{Old Row}_3 - \frac{5}{3} \times \text{New Row}_2$$

$$\text{New Row}_4 = \text{Old Row}_4 - (\frac{5}{3}M + \frac{1}{3}) \times \text{New Row}_2$$

جدول الحل الأساسي المقبول الأمثل

B.V. \ All	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	RHS
X_1	1	0	1/5	0	3/5	−1/5	3/5
X_2	0	1	−3/5	0	−4/5	3/5	6/5
S_3	0	0	1	1	1	−1	1
Z	0	0	1/5	0	$\frac{8}{5}-M$	$-\frac{1}{5}-M$	18/5

نتوقف لأن جميع قيم صف Z سالبة أو أصفار ولا نتوقع وجود تحسن في قيمة دالة الهدف، وأن الحل الأمثل هو $X_1=3/5=0.6$, $X_2=6/5=1.2$, $S_3=1$ و Min. $Z=18/5=3.6$ ولتأكيد ذلك يتم استخدام طريقة الرسم، والتي أعطتنا قيم متطابقة للقيم أعلاه كما في الرسم البياني الآتي: