٢-٥-٢ الصيغة القياسية Standard Form

تُعتبر هذهِ الصيغة أفضل من السابقة لأنها تُستخدم في الطريقة العامة (Simplex Method) المعتمدة في تحليل البرامج الخطية، وأهم خصائصها هي[1]:

١. تحويل جميع القيود الواردة بالمسألة إلى معادلات ماعدا القيد الخاص بإشارة المتغيرات.

٢. عناصر الطرف الأيمن ((.Right Hand Side (R.H.S) من كل قيد تكون بالصيغة $b_i \geq 0$.

٣. جميع متغيرات القرار تكون بالصيغة أكبر أو يساوي للصفر $X_j \geq 0$.

٤. دالة الهدف تكون من نوع Minimum أو Maximum.

مُلاحظة (٢-٢): يتم تحويل قيود المُتباينات إلى مُساواة (معادلات) وذلك بإضافة أو طرح متغيرات وهمية ($S_i \geq 0$) إلى الطرف الأيسر من كل قيد، وهذهِ المتغيرات تضاف للقيود من نوع أصغر أو يساوي ($\leq$)، وتطرح من القيود من نوع أكبر أو يساوي ($\geq$)، وكما موضح في القاعدة الآتية:

$$\left.\begin{array}{ll} & a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \\ \underline{\text{or}} & a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{القياسية}} \begin{array}{l} a_1 X_1 + a_2 X_2 - S_1 = b \\ a_1 X_1 + a_2 X_2 + S_2 = b \end{array}$$

حيثُ $S_i \geq 0$ متغيرات وهمية لا تؤثر على الحل.

مُلاحظة (٢-٣): يُدعى المتغير الوهمي بالمتغير المُهمل (.Slack Var) عندما يضاف للطرف الأيسر للقيد من نوع ($\leq$) وذلك لأن b هي طاقة أو أمكانية متوفرة، لذا فإن S_i

---

(1) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 32.

تُمثل طاقة أو أمكانية غير مُستهلكة أو مُهملة ينبغي أضافتها للطرف الأيسر لتصبح المتباينة مُساواة، ويُدعى المتغير الوهمي بالمتغير الفائض (Surplus Var.) عندما يطرح من الطرف الأيسر للقيد من نوع (≥) وذلك لأن b تُمثل كمية مطلوبة لذا S_i هي كمية فائضة أو زائدة عن الكمية المطلوبة ينبغي طرحها من الطرف الأيسر لتصبح المُتباينة مُساواة.

تلعب الصيغة القياسية دوراً مهماً في حل مسائل L.P.P. وبصورة عامة إذا كانت لدينا المسألة الآتية:

$$Max. Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$
$$\textbf{Sub.to} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . X_j \leq b_i$$
$$X_j \geq 0 , b_i \geq 0$$

القياسية

$$Max. Z - \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + 0S_i = 0$$
$$\textbf{Sub.to} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . X_j + S_i = b_i$$
$$X_j \geq 0 , b_i \geq 0 , S_i \geq 0$$

مثال (٢-٩): أكتب مسألة البرمجة الخطية التالية بالصيغة القياسية:

Max. $Z = 3X_1 - 2X_2$

Sub. to

$$X_1 - 2X_2 \geq 3$$
$$3X_1 + 4X_2 \leq 2$$
$$X_1 + 3X_2 = 5$$

X_1, X_2 Unrestrected in sign.

الحل: يتم في البداية الاستعاضة عن المتغيرين X_1, X_2 بمتغيرات موجبة وذلك بسبب أنهما غير محددان بإشارة (Unrestricted in sign) كما ورد في قيد عدم السالبية في المسألة:

$$\text{Let}\begin{Bmatrix} X_1 = \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1 \\ X_2 = \bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2 \end{Bmatrix} \text{ where } \bar{X}_1, \bar{\bar{X}}_1, \bar{X}_2, \bar{\bar{X}}_2 \geq 0$$

$$Max.Z - 3\left(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1\right) + 2\left(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2\right) + 0\,S_1 + 0\,S_2 = 0$$

Sub. to

$$X_1 - 2\,X_2 \geq 3 \quad \rightarrow \quad \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1 - 2\left(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2\right) - S_1 = 3$$

$$3X_1 + 4\,X_2 \leq 2 \quad \rightarrow 3\left(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1\right) + 4\left(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2\right) + S_2 = 2$$

$$X_1 + 3\,X_2 = 5 \quad \rightarrow \quad \bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1 + 3\left(\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}_2\right) = 5$$

$$\bar{X}_1, \bar{\bar{X}}_1, \bar{X}_2, \bar{\bar{X}}_2, S_1, S_2 \geq 0$$

مع مُلاحظة إن إدراج مُعاملات المُتغيرات الوهمية S_1, S_2 في دالة الهدف بقيم صفرية لا يُغير دالة الهدف.

٢-٦ تحليل مسائل البرمجة الخطية L.P.P. Analysis

يتم تحليل مسائل البرمجة الخطية لتحديد قيم المتغيرات المطلوب أتخاذ القرار بشأنها X_j والتي تُعظم أو تُقلل قيمة دالة الهدف، أما بأستخدام الطريقة البيانية (طريقة الرسم) (Graphical Method) في حالة وجود متغيرين، أو بأستخدام الطريقة العامة (Simplex Method) عند وجود متغيرين أو أكثر[١].

وهنالك بعض المُصطلحات المُهمة التي يجب معرفتها مسبقاً قبل الإطلاع على هاتين الطريقتين وهي:

(١) شمخي، عدنان، وحسن، ضويه، (١٩٨٨)، "مقدمة في بحوث العمليات"، مطبعة الحكمة، جامعة بغداد، ص ٣٥.

١. **الحل المقبول (.Feasible Solution (F.S**: وهو الحل $X = (X_1, X_2, \dots , X_n)$ الذي لا يتعارض مع واحد أو أكثر من القيود الفعلية ويحقق كافة القيود لاستخراج قيم X_j (بغض النظر عن كون قيم X_j موجبة أو سالبة أو صفر).

٢. **الحل غير المقبول (غير مُمكن) .Infeasible S** : وهو الحل الذي يتعارض مع واحد أو أكثر من القيود الفعلية الواردة بالمسألة.

٣. **الحل الأساسي المقبول (.Basic F. S. (B.F.S**: يُسمى الحل الأساسي مقبولاً إذا كان عدد المتغيرات الموجبة فيه لا يتجاوز عدد القيود m (قيم X_j موجبة أو صفرية بقدر عدد القيود).

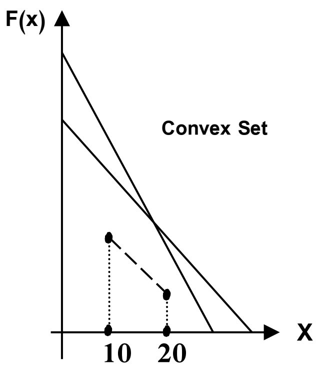
٤. **الحل الأساسي المقبول غير المُفكك (غير مُجزء، غير مُنحل) Non–Degenerate .B.F.S**: يكون الحل الأساسي المقبول غير مُفكك إذا أحتوى بالضبط على m من المتغيرات الموجبة $X_j > 0$.

٥. **الحل الأمثل (.Optimal Solution (O.S**: وهو أفضل الحلول المقبولة والذي يحقق كافة القيود، إضافة إلى ذلك يجعل قيمة دالة الهدف في نهايتها العظمى أو في نهايتها الصغرى، وقد يوجد للمسألة حل أمثل وحيد (.Unique O.S) أو عدة حلول مثلى (.Multiple O.S)، ويعطي تعدد الحلول المثلى عادةً مرونة أكبر لمُتخذي القرار لدى قيامهم بتنفيذ أحدها.

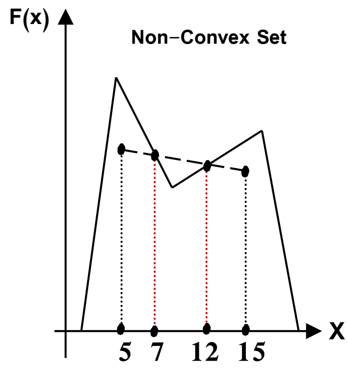
٦. **حل غير أمثل Non–Optimal Solution:** كل حل لا يُمكن تصنيفهُ كحل أمثل يسمى حلاً غير أمثل سواء كان مقبولاً أو غير مقبول.

٧. **المجموعة المُحدبة Convex Set:** هي مجموعة من النقاط $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$، كل زوج منها X_1 و X_2 يُكون قطعة مستقيم كاملة تربط بين هاتين النقطتين في المجموعة وتحقق العلاقة:

$$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in X \qquad \text{for } 0 \leq \lambda \leq 1$$



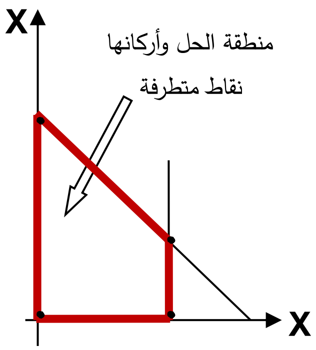
$\lambda = 0.5 \rightarrow 0.5(10)+0.5(20)=15 \in X$
$\lambda = 0.3 \rightarrow 0.3(10)+0.7(20)=17 \in X$

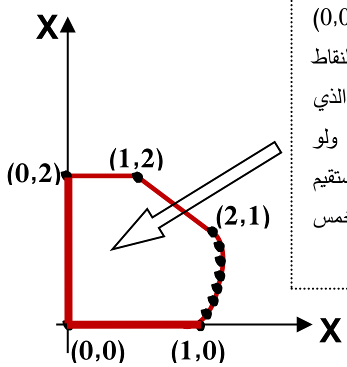


$\lambda = 0.5 \rightarrow 0.5(5)+0.5(7)=6 \in X$
$\lambda = 0.3 \rightarrow 0.3(12)+0.7(15)=14.1 \in X$

وتبرز أهمية المجموعة المُحدبة بأن فضاء الحل لمسائل البرمجة الخطية هو دوماً مجموعة مُحدبة، وهذا يُسهل عملية الحصول على الحل الأمثل.

٨. **النقطة المُتطرفة Extreme Point:** أي نقطة $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ في المجموعة المحدبة هي نقطة مُتطرفة إذا كان X لا يُمكن التعبير عنها كتوافيق مُحدبة لأية نقطتين في المجموعة المُحدبة.





النقاط المُتطرفة هي: (0,0), (1,0), (0,2), (1,2), (2,1) وجميع النقاط غير المُنتهية على المُنحنى الذي يربط النقطتين (2,1) ، (1,0) ولو تحول المُنحنى إلى خط مستقيم لأصبح لدينا فقط النقاط الخمس السابقة أعلاه .

٢-٧ الطريقة البيانية (الرسم) لحل مسائل البرمجة الخطية Graphical Method

يُمكن استخدام هذهِ الطريقة لإيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرين، وتستند هذهِ الطريقة على تحديد منطقة الحل المقبول (Feasible Solu. Space) وهي منطقة مُغلقة بكافة القيود الواردة في المسألة، ثم تحديد النقطة أو النقاط المُتطرفة التي تحقق القيمة العظمى أو الصغرى لدالة الهدف[١].

ويُمكن تلخيص الخطوات الأساسية لهذهِ الطريقة بالنقاط الآتية:

١. يتم تحويل إشارة المتباينات إلى حالة مساواة، ثم نرسم الخطوط المستقيمة المُمثلة لهذهِ القيود.

٢. نحدد منطقة الحل لكل قيد حيث نعوض نقطة الأصل في القيد فإذا تحققت علاقة القيد فمنطقة الحل باتجاه نقطة الأصل، وبخلافة فمنطقة الحل تبتعد عن نقطة

(1) Hamdy A. Taha, (2007), "Operations Research: An Introduction", 8^{th} Edition ,Pearson Prentice Hall, p. 15.