يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Max. } Z = 10\,X_1 + 9\,X_2$$

Sub. to

$$5\,X_1 + 3\,X_2 \geq 525 \quad \ldots(1)$$
$$1.25\,X_1 + 2.5\,X_2 \leq 600 \quad \ldots(2)$$
$$X_1 + 1.5\,X_2 \leq 585 \quad \ldots(3)$$
$$1.4\,X_1 + X_2 \leq 315 \quad \ldots(4)$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

٢-٥ الصيغة العامة لنماذج البرمجة الخطية[*]

General formulation of L.P. models

بعد العرض السابق لأمثلة تتعلق بالبرمجة الخطية، يُمكن صياغة البرنامج الخطي الذي يتضمن دالة الهدف (Z or X_0) والقيود التي من المُمكن أن تأخذ العلاقة ($\geq$, = , $\leq$)، وأن جميع متغيرات القرار X_j تكون غير سالبة ($X_j \geq 0$) لأنها متغيرات تتصل بالواقع لذلك فالنتيجة السالبة لها تصبح كميات غير حقيقية (لأنها قد تُعبر عن كمية منتجة، خليط، زبائن وغيرها – وهي كميات موجبة بطبيعة الحال ولا يسمح بأن تكون قيمة سالبة)، ولذلك يُمكن وضع الصيغة العامة بدلالة أشارة المجموع[1]:

(*) راجع المصدر:

الفضل، مؤيد عبد الحسين، "المنهج الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى"، **مصدر سبق ذكره**، الفصل الثاني، ص ٦٥، للمزيد من نماذج البرمجة الخطية المستخدمة في أتخاذ القرار الأمثل.

(1) Winston Wayne L., (2004), "Operations Research: Application and Algorithms", Thomson Learning, USA, p. 23.

$$Max.\ or\ \ Min.\quad Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$Sub.to \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.X_j \ \le\ b_i \quad \forall\ \ (i=1,2,\dots,m)\&(j=1,2,\dots,n)$$

$$X_j \ge 0 \quad \forall\ \ (j=1,2,\dots,n)$$

حيثُ C_j , a_{ij} , b_i ثوابت تُحدد من سياق المسألة لكل قيم i و j.

X_j المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بشأنها.

أو باستخدام إشارة المصفوفات والمُتجهات:

Max. or Min. Z = C X

Sub. to

$$A X \ \ (\le , = , \ge)\ \ B$$

$$X \ \ge\ 0$$

حيثُ $C = [C_1 \ \ C_2 \ \dots \ C_n\ ]$ متجه صفي عدد عناصرهُ n، ويُمثل عناصر مُعاملات دالة الهدف.

وإن $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_1} \\ \boldsymbol{X_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{X_n} \end{bmatrix}$ مُتجه عمودي عدد عناصرهُ n، ويُمثل مُتغيرات القرار.

وإن $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$ مصفوفة من الرتبة (m × n) تُمثل مُعاملات مُتغيرات القرار في القيود.

إن الخطوة الرئيسية التالية بعد صياغة نموذج البرمجة الخطية هي تحليل النموذج رياضياً، لكن نظراً لاختلاف صيغ البرمجة الخطية فُمن الضروري تعديل هذهِ الصيغ لتحديد نموذج حل مناسب، لهذا توجد صيغتان هما الشكل أو الصيغة القانونية (Canonical Form)، والصيغة القياسية أو المعيارية (Standard Form)، وكما موضح بالشكل الآتي:

٢-٥-١ الصيغة القانونية Canonical Form

يُمكن وضع الشكل القانوني التالي للصيغة العامة للبرمجة الخطية التي تم الإشارة إليها أعلاه:

$$Max.\ \ Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$Sub.to \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.X_j \ \le \ b_i \quad \forall \ \ (i=1,2,\dots,m)\&(j=1,2,\dots,n)$$

$$X_j \ge 0 \quad \forall \ \ (j=1,2,\dots,n)$$

وخصائص هذهِ الصيغة هي[(١) (٢)]:

١. يتم تحويل جميع متغيرات القرار X_j إلى الإشارة $\geq$ (لأنها كمية موجبة).
٢. يتم تحويل إشارة جميع قيود المسألة إلى نوع أقل أو يساوي $\leq$.
٣. جعل دالة الهدف من نوع .Max.

وبالإمكان وضع أي صيغة للبرمجة الخطية بالشكل القانوني أو العام باستخدام عمليات التحويل الأولية (Elementary Transformation) والتي يتم أستعراضها بالشكل المُبسط الآتي:

1. Min. Z $\xrightarrow{\times(-1)}$ Max. (− Z) = Max. W , Where W = (−Z)

2. $a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \xrightarrow{\times(-1)} -a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq -b$

3. قيد المُساواة يتحول إلى مُتباينتين مُتعاكستين بالاتجاه هما ≤ و ≥ ثم تُحول الـ ≥ إلى ≤ وذلك بضربها بالإشارة السالبة كما في المثال الآتي:

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 = b \longrightarrow \begin{cases} a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b \\ a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \xrightarrow{\times(-1)} -a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq -b \end{cases}$$

4. بالنسبة للقيد المُتكون من قيمة مُطلقة في الطرف الأيسر منهُ فيتحول إلى مُتباينتين بالشكل الآتي:

$$| a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b | \longrightarrow \begin{cases} +(a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b) \\ -(a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b) \end{cases}$$

---

(١) صادق، ثناء رشيد، (٢٠٠١)، "بحوث العمليات – البرمجة الخطية"، منشورات جامعة عمر المختار – البيضاء – ليبيا، ص ٢٥.

(2) Dalal S. Al-Jawad, **Op. Cit.**, p. 10.

5. بالنسبة للمتغير غير المُقيد بالإشارة (أي أن إشارتهُ غير مُحددة فيما أذا كانت موجبة أو سالبة أو صفر) فيُمثل بالفرق بين متغيرين إشارة كل منهما غير سالبة، كما في المثال الآتي:

$$If \quad X_1 \quad Unrestricted\ in\ Sign$$
$$\therefore \quad let \quad X_1 = \left(\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}_1\right) \quad Where \quad \bar{X}_1\ , \bar{\bar{X}}_1\ \geq 0$$

مُلاحظة (٢-١): يتحول قيد القيمة المُطلقة والمُساواة إلى أربع قيود كما في القاعدة الآتية:

If $\left| a_1 X_1 + a_2 X_2 \right| = b \longrightarrow + (a_1 X_1 + a_2 X_2) = b$

$\longrightarrow a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b$

$\longrightarrow - a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq - b$

$\longrightarrow - (a_1 X_1 + a_2 X_2) = b$

$\longrightarrow - (a_1 X_1 + a_2 X_2) \leq b$

$\longrightarrow + (a_1 X_1 + a_2 X_2) \leq - b$

مثال (٢-٨): حول مُشكلة البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة القانونية (Convert the L.P.P. below to the Canonical Form)

Min. $Z = 3 X_1 - 3 X_2 + 7 X_3$

Sub. to

$$X_1 + X_2 + 3 X_3 \geq 50$$
$$5 X_1 + 3 X_2 = 20$$
$$\left| 5 X_1 + 8 X_3 \right| \leq 100$$

$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 Unrestricted in sign

الحل: يجب تحويل الـ(.L.P.P) إلى الصيغة القانونية باستخدام عمليات التحويل الأولية الآتية:

$\because X_3 \quad Unrestricted\ in\ Sign$

$\therefore \quad let \quad X_3 = (\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3) \quad Where \quad \bar{X}_3\ , \bar{\bar{X}}_3\ \geq 0$

Min. $Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3 \xrightarrow{\times(-1)}$ Max. W = Max. $(-Z)$

Where $W = -Z = -3X_1 + 3X_2 - 7\left(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3\right)$

Sub. to

$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 50 \xrightarrow{\times(-1)} -X_1 - X_2 - 3\left(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3\right) \leq -50$

$5X_1 + 3X_2 = 20 \longrightarrow 5X_1 + 3X_2 \leq 20$

$\qquad\qquad\qquad\quad \longrightarrow -5X_1 - 3X_2 \leq -20$

$|5X_1 + 8X_3| \leq 100 \longrightarrow 5X_1 + 8\left(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3\right) \leq 100$

$\qquad\qquad\qquad\quad \longrightarrow -5X_1 - 8\left(\bar{X}_3 - \bar{\bar{X}}_3\right) \leq 100$

$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 Unrestricted in sign $\longrightarrow X_1, X_2\ , \bar{X}_3, \bar{\bar{X}}_3 \geq 0$