الفصل الثاني

نماذج البرمجة الخطية Linear Programming Models (LPM)

٢-١ مقدمة Introduction

يعتقد الكثيرون أن الموارد المتاحة للبشرية كثيرة وقابلة للاستدامة، والحقيقة أنها محدودة وتندر أحياناً، فموارد المياه الصالحة للشرب محدودة، البترول الخام محدود وقابل للنفاذ في المستقبل القريب، الأرض الصالحة للزراعة أو السكن محدودة، محدودية الوقت والموظفين والأموال المتاحة للشركات لإنجاز أعمالها، أضف إلى ذلك محدودية مساحات التخزين والمواد الخام.

من هنا يأتي الدور الفاعل لنماذج البرمجة الخطية لاستخدام الموارد المتاحة بالشكل الأمثل والملائم سواءً على صعيد الأشخاص أو الشركات أو الحكومات التي تعيش في بيئة تنافسية. تُعتبر البرمجة الخطية إحدى نماذج البرمجة الرياضية التي تُعالج مسألة تخصيص أو توزيع الموارد أو الطاقات المحددة لتحقيق هدف مُعين، ويُعبر عن هذا الهدف بدالة خطية تُستخدم لوصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر وهذهِ العلاقة مباشرة وتتغير بنفس النسبة، وتسمى هذهِ الدالة بدالة الهدف (Objective Function)، وقد تكون دالة تعظيم الربح (Maximum Function)، أو دالة تقليل الكلفة أو الخسائر إلى أقل حد ممكن (Minimum Function)، أو دالة إنتاج، وتخضع هذهِ الدالة إلى قيود عبارة عن معادلات أو متباينات تعبر عن (المواد الأولية الخام، عدد ساعات العمل أو التشغيل، طاقة المكائن، كمية المبالغ المستثمرة في نشاط معين، الأيدي العاملة، مساحات الاراضي النادرة (التي تحتوي النفط أو مناجم الفحم والذهب)....ألخ).

٢-٢ الافتراضات الأساسية للبرمجة الخطية[1] Basic assumpations for L.P.

١. أن يكون هناك هدف مطلوب تحقيقهُ (مثلاً تحقيق أقصى ربح، أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد مُمكن).

٢. أن تكون هنالك بدائل مُختلفة للوصول إلى الهدف أو طرق مختلفة لاستغلال الموارد المتاحة والمحدودة.

٣. أن تكون الموارد المُستخدمة محدودة لأن طريقة البرمجة الخطية تتمثل في كونها طريقة علمية تهدف إلى استخدام الموارد المحدودة أفضل استخدام لتحقيق هدف مُعين.

٤. يجب أن تكون هناك علاقة بين المُتغيرات أي توفر عنصر التأكيد وغياب الاحتمالات.

٥. التعبير عن دالة الهدف والقيود بمُعادلات أو مُتباينات خطية.

٦. أن يُعبر النموذج الخطي عن المشكلة قيد الدراسة، وليس العكس بأن تُصاغ المشكلة لتناسب النموذج المُعد مسبقاً.

(1) Ruhul A. Sarker & Charles S. Newton, (2008), "Optimization Modeling – A Practical Approach", CRC Press – Taylor & Francis Group, USA, p. 39.

٢-٣ البرمجة الخطية وبعض مجالات تطبيقها[١]

L.P. and some of its application fields

١. **العسكرية:** تلعب دوراً هاماً في التخطيط العسكري واتخاذ القرار والتوزيع الأمثل للقدرات العسكرية المتاحة.

٢. **التحليل المالي:** كالمصارف وميزانية الدولة للحصول على التوزيع الأمثل حيث يحتاج المحلل المالي إلى اختيار سياسة مالية من بين عدة اختيارات، بهدف تحقيق أقصى عائد من الاستثمار.

٣. **الإدارية:** يوفر المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب.

٤. **توزيع ونقل البضائع:** لمعرفة كمية البضائع الواجب شحنها من كل مستودع إلى كل زبون بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن، وهذا يساعد العديد من الشركات التي لديها مستودعات في عدة مواقع مختلفة، لتحقيق طلبات الزبائن الذين يطلبون بضائع تلك الشركة.

٥. **الصناعة:** لتعظيم الربح وتخفيض تكلفة التصنيع والانتاج والنقل ووضع جدول انتاج وسياسة مخزون لمقابة الطلب مستقبلاً، الحالة المثلى أن يتم تحقيق كل من الجدول والسياسة والطلب.

٦. **الإنشاءات:** لبناء المشاريع الضخمة لتوفير الوقت المستخدم للمشروع.

٧. **التسويق:** لمعرفة ما هي أفضل طريقة لتوزيع ميزانية إعلان بين أنواع وسائل الإعلام المختلفة مثل الإذاعة، والتلفزيون، والصحف، والمجلات، وذلك لتحديد المزيج الإعلامي الذي يحقق أعلى عائد من الإعلان.

---

(١) الصفدي، محمد سالم، **مصدر سبق ذكره**، ص ٢١.

٨. **إدارة المستشفيات:** لضبط عملية التغذية والأدوية ضمن الإمكانيات المتاحة.

٩. **التخطيط:** من خلال متابعة المشـــاريع وإعداد الخطة الزمنية اللازمة لتنفيذ تلك المشاريع.

٢-٤ أمثلة لصياغة المشاكل باستخدام نماذج البرمجة الخطية

Examples of formulation problems using L.P. models

مثال (٢-١): من أجل تحضير نوعين من المُنتجات P_1 و P_2 نستخدم ثلاث أنواع من مُستلزمات الأنتاج S_1 و S_2 و S_3، حيثُ إن إحتياطي هذهِ المواد الأولية والمُتوفره لدينا معلوم، وكذلك المُعدلات اللازمة من هذهِ المواد لإنتاج كل وحدة من P_1 و P_2، وبما إن هذهِ المنتجات ستنزل للسوق للتصريف فإن الربح المتوقع من تصريف كل وحدة منتجة معلوم لدينا أيضاً ومعطى بالجدول الآتي:

أنواع مُستلزمات الانتاج المُستخدمة في الانتاج	كمية مُستلزمات الانتاج اللازمة لانتاج وحدة واحدة من البضاعة		احتياطي مُستلزمات الانتاج المتوفر والمُتاح للأستخدام
	P_1	P_2	
S_1	2	5	20
S_2	6	5	45
S_3	4	6	30
الربح الذي يُمكن تحقيقهُ من انتاج وحدة واحدة مقدراً بالوحدات النقدية	32	40	

والمطلوب وضع الخطة المثالية للانتاج بحيث نحصل على أكبر ربح مُمكن مراعين في ذلك الاحتياطي المتوفر أو المُتاح من مُستلزمات الانتاج، وإن السوق مفتوحة وتستوعب كامل الانتاج.

الحل: من إجل تصميم النموذج نفترض أن:

X_1 تُمثل كمية الانتاج من النوع الأول P_1 حيثُ $X_1 \geq 0$.

X_2 تُمثل كمية الانتاج من النوع الثاني P_2 حيثُ $X_2 \geq 0$.

إن انتاج هذهِ الكميات يتطلب كمية من المواد الأولية التي ندعوها بمُستلزمات الانتاج، والتي لا يُمكن أن تُستهلك إلا بإطار ما هو متوفر لدينا حيثُ إن الكمية المُتاحة محدودة ويجب إستغلالها لانتاج البضائع الأكثر ربحية، أي البضائع التي توفر لنا فائض وأعظم مقدار من الربح، وهذا ما عبرنا عنهُ من خلال الكمية المنتجة X_1 و X_2، ومن خلال الاحتياطي المتوفر والذي يُمكن التعبير عنهُ بالمتباينات الخطية الآتية:

قيد المادة الأولية S_1 ..... $2X_1 + 5X_2 \leq 20$

قيد المادة الأولية S_2 ..... $6X_1 + 5X_2 \leq 45$

قيد المادة الأولية S_3 ..... $4X_1 + 6X_2 \leq 30$

نُلاحظ من العلاقات الرياضية الموضوع كقيود لحل المُشكلة، أنهُ لا يجوز أن تتجاوز كمية مُستلزمات الانتاج الضرورية لعمليات الانتاج حجم الاحتياطي المُتاح الموجود لدينا من المواد الأولية.

وبناء على القيود الموضوعة فإن نوع المنتج الذي لا نرغب بإنتاجه لضعف ربحيته سوف يأخذ القيمة صفر ($X_i = 0$)، وهذا يعني إن الانتاج من البضاعة ذات النوعية (i) سيكون معدوماً، وإذا رغبنا بانتاج البضاعة P_i حتى لو كانت بكميات قليلة فإن ($X_i>0$)، وأنطلاقاً من هذا فإن الكميات التي يُمكن إنتاجها ($X_1, X_2, \dots, X_n$) يُمكن أن تأخذ إحدى حالتين هُما: أما حالة إنعدام الانتاج، أو حالة الانتاج، ولا ثالث لهاتين الحالتين، أي لا يوجد لدينا الحالة السلبية لأن الانتاج السلبي ليس لهُ معنى اقتصادي في مسألتنا.

لذلك يجب أن نُعبر في النموذج الرياضي عن رفضنا للانتاج السالب بقيود خاصة نُضيفها للنموذج وندعوها بقيود عدم السلبية بالصيغة الآتية:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots , X_n \geq 0$$

إن الهدف النهائي للحل في مثل هذهِ المسائل هو الحصول على الحد الأعظم من الربح بشرط أن يتوفر لنا في السوق المُفتوحة تصريف وبيع كامل للبضائع المُنتجة، ونُعبر عن ذلك من خلال تابع يحتوي على (n) عدد من المتغيرات تُمثل الانتاج البضائعي، والذي يُمكن تحديدهُ في مثالنا بالمتغيرين (X_1 , X_2) وإن بيع الكمية X_1 من البضاعة P_1، والكمية X_2 من البضاعة P_2 تُعطي ربحاً يتناسب طردياً مع كميات الوحدات من البضائع (X_1 , X_2)، فنحصل على ربحاً من كمية المنتج الأول مقدارهُ ($32X_1$)، وربحاً من كمية المنتج الثاني مقدارهُ ($40X_2$) وحدة نقدية، ويكون إجمالي الأرباح من مُختلف البضائع المُنتجة مساوياً للعلاقة[1]:

$$Z(x) = 32X_1 + 40X_2 \qquad \text{(وحدة نقدية)}$$

وبما إن النموذج لا يحدد الكميات الواجب انتاجها من البضائع فإن هنالك عدداً كبيراً من الحلول التي يُمكن أن تحقق قيود المسألة، ولكن لا تُحقق الحالة المثلى، والحل الوحيد الذي يُحقق مثلوية المسألة هو الحل الذي تُبنى على أساسهِ خُطة الانتاج، ويكون هو البديل المثالي الذي يجب أن نتخذ بهِ القرار المثالي، بحيث يُحقق كامل قيود المسألة ويُعطينا أعظم ربح مُمكن (Maximum)، الشيء الذي نعتبرهُ هدفاً أساسياً للمشكلة المطروحة والذي نبحث عنه لاتخاذ القرار المثالي وذلك من خلال أهم توابع النموذج

(١) نستخدم عادة الرمز Z(x) أو Z أو X_0 أو أي رمز أخر للدالة على رمز دالة الهدف.