الرياضي وهو التابع الهدفي، والذي يشكل مع باقي قيود النموذج وقيد عدم السلبية النموذج الرياضي للمسألة الآتي:

Max. $Z(x) = 32\ X_1 + 40\ X_2$ (دالة الهدف)

Sub. to

(القيود الهيكلية)

$2\ X_1 + 5\ X_2 \leq 20$ ..... S_1 قيد المادة الأولية

$6\ X_1 + 5\ X_2 \leq 45$ ..... S_2 قيد المادة الأولية

$4\ X_1 + 6\ X_2 \leq 30$ ..... S_3 قيد المادة الأولية

$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0$ ..... قيد عدم السلبية

عند هذهِ المرحلة يُمكن تعميم مسائل انتاج البضائع ونموذجها الخطي أعلاه في مختلف القطاعات المنتجة الصناعية والزراعية والتجارية، وذلك بافتراض إن المؤسسة لديها (n) نوع من البضائع أو المنتجات، ولديها (m) نوع من مُستلزمات الانتاج الواجب توفرها للعملية الانتاجية بما فيه المواد الأولية والأصول الثابتة والأيدي العاملة والأراضي الزراعية وغيرها، وسنستخدم الرموز الآتية[1]:

S_i تمثل أنواع مُستلزمات الانتاج المُستخدمة في العملية الانتاجية حيثُ يُمكن أن تأخذ قيم (i) عدداً من الأنواع تساوي (m) حيثُ ($i=1,2,3,\ldots,m$).

B_i تمثل الاحتياطي المُتاح أو المتوفر من كل نوع من أنواع مستلزمات الأنتاج (m) حيثُ ($i=1,2,3,\ldots,m$).

P_j تُمثل أنواع البضائع التي يُمكن انتاجها من خلال المؤسسة الانتاجية وعددها (n) حيث ($j=1,2,3,\ldots,n$).

(١) البلخي، زيد تميم، **مصدر سبق ذكره**، ص ٣٥.

a_{ij} هي كمية المواد الأولية أو مستلزمات الانتاج أو ساعات العمل (عوامل الانتاج المختلفة) من النوع (i) والتي تُنفق لانتاج وحدة بضائعية واحدة من النوع (j) حيثُ ($i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$) إذ أن كل نوع من البضائع تحتاج إلى كميات مُختلفة من مستلزمات الانتاج ندعوها بمُعدلات الانتاج.

بهذا يُمكن وضع الشكل العام لمسائل انتاج البضائع كما في جدول (٢-١) الآتي[١][٢]:

أنواع مُستلزمات الانتاج المُستخدمة في الانتاج	كمية مُستلزمات الانتاج اللازمة لانتاج وحدة واحدة من البضاعة			احتياطي مُستلزمات الانتاج المتوفر والمتاح للاستخدام
	P_1	P_2 ...	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12} ...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22} ...	a_{2n}	b_2
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
S_m	a_{m1}	a_{m2} ...	a_{mn}	b_m
الربح الذي يُمكن تحقيقهُ من انتاج وحدة بضاعة واحدة مقدراً بالوحدات النقدية	C_1	C_2 ...	C_n	

جدول (٢-١) يوضح الشكل العام لمسائل انتاج البضائع

(1) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Op. Cit.**, p. 32.

(2) Dalal S. Al-Jawad, **Op. Cit.**, p. 9.

وباعتبار أن X_j هي كمية وحدات البضائع من النوع (j) الواجب إنتاجها من كل الأنواع، وأن هذهِ الكميات من البضائع يجب أن تتفق مع قيد عدم السلبية.

بهذا يُمكن وضع الصيغة العامة للنموذج الرياضي الخطي على النحو الآتي:

$$\text{Max.} \quad Z(x) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n \qquad \text{(دالة الهدف)}$$

Sub. to

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n \leq b_m$$
$$X_j \geq 0 \quad \forall (j = 1,2, \ldots,n)$$

مثال (٢-٢): أستلمت الشركة العامة للصناعات البتروكيمياوية في البصرة طلب للحصول على 1400 كغم من خليط حبيبات بلاستيكية (بولي آثيلين) عالي الكثافة (HDPE) التي تتكون من ثلاث مركبات وبالمواصفات الآتية:

- يجب أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كغم من المركب الأول.
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 200 كغم من المركب الثاني.
- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 150 كغم من المركب الثالث.

وأن كلفة الكغم من المركب الأول والثاني والثالث هي 2 و3 و4 ألف دينار على التوالي.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية لهذه المسألة والذي يحقق أقل تكلفة ممكنة.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

المتغيرات التي ترتبط بالمسألة عبارة عن عدد الكيلوغرامات من كل مركب والتي ستدخل في تكوين الخليط البتروكيمياوي، حيثُ نفرض أن:

X_1: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الأول حيثُ $X_1 \geq 0$.

X_2: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الثاني حيثُ $X_2 \geq 0$.

X_3: يمثل عدد الكيلوغرامات من المركب الثالث حيثُ $X_3 \geq 0$.

دالة الهدف: كلفة الكغم الواحد من المركب الأول تساوي 2 ألف دينار فإذا استخدمنا (X_1) كغم من هذا المركب فستكون الكلفة $2X_1$ ألف دينار، بنفس الطريقة إذا استخدمنا X_2 كغم من المركب الثاني فستكون الكلفة $3X_2$ ألف دينار، كذلك إذا استخدمنا (X_3) كغم من المركب الثالث ستكون التكلفة $4X_3$ ألف دينار.

وحيث أن الهدف هو تقليل الكلفة (Min.) لذا فإن دالة الهدف ستكون على الصورة:

$$Min.\ Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

القيود الفنية:

- القيد الفني الأول: شرط الطلبية أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كغم من المركب الأول لذا يتم صياغة القيد الأول بالشكل $X_1 \leq 400$.
- القيد الفني الثاني: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 200 كغم من المركب الثاني أي أن $X_2 \geq 200$.
- القيد الفني الثالث: يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 150 كغم من المركب الثالث أي أن $X_3 \geq 150$.
- القيد الفني الرابع: كمية الطلب من الخليط يجب أن تساوي 1400 كغم، عندها سيكون القيد الرابع هو $X_1 + X_2 + X_3 = 1400$.

مما سبق نجد أن نموذج البرمجة الخطية والذي سيؤدي إلى تخفيض التكاليف بالصيغة الآتية:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

Sub. to.

$$\left.\begin{aligned} X_1 &\leq 400 \\ X_2 &\geq 200 \\ X_3 &\geq 150 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 1400 \end{aligned}\right\} \text{القيود الفنية}$$

$X_j \geq 0$ where $j = 1,2,\ldots,n$ قيود عدم السالبية

مثال (٢-٣): تنتج شركة آسيا لصناعة الأصباغ المحدودة – فرع بغداد نوعين من مواد الأصباغ آسيا (A) و كريستال (B)، حددت الشركة إن انتاجها من النوعين يجب أن لا يقل عن 350 لتر، كما إن طلب العميل الرئيسي من المادة الأولى 125 لتر يجب تحقيقها، ويحتاج انتاج لتر من المادة A إلى ساعتين ومن المادة B إلى ساعة واحدة، علماً أن عدد ساعات الانتاج المتاحة الشهر القادم 600 ساعة فقط، وأن تكلفة انتاج اللتر الواحد من المادة A وB هو ألفين وثلاثة ألاف دينار على التوالي، أن هدف الشركة هو تحقيق المتطلبات السابقة بأقل تكلفة إنتاج مُمكنة.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية لهذهِ المشكلة.

الحل: إعداد النموذج الرياضي (الفرضيات):

نفرض إن X_1 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المادة A حيثُ $X_1 \geq 0$

نفرض إن X_2 يُمثل عدد الوحدات المنتجة من المادة B حيثُ $X_2 \geq 0$

دالة الهدف: تهدف الشركة إلى تحقيق متطلبات العميل بأقل تكلفة انتاج مُمكنة، حيثُ يُمكن صياغة دالة الهدف بالاعتماد على المعادلة:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2$$

النموذج الرياضي: يتكون النموذج من ثلاث قيود هي:

١. قيد الانتاج من النوعين يجب أن لا يقل عن 350 لتر:

$$X_1 + X_2 \geq 350$$

٢. يجب تحقيق قيد طلب العميل الرئيسي من المادة الأولى وهو 125 لتر:

$$X_1 \geq 125$$

٣. قيد عدد ساعات الإنتاج المتاحة الشهر القادم 600 ساعة فقط:

$$X_1 + X_2 \leq 600$$

٤. قيد عدم السالبية لجميع متغيرات القرار:

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يُمكن الآن كتابة النموذج الرياضي بصيغته النهائية على النحو الآتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + 3X_2$$

Sub to

$$X_1 + X_2 \geq 350$$

$$X_1 \geq 125$$

$$X_1 + X_2 \leq 600$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$