الأصل، وفي حالة المساواة تكون منطقة الحل هي فقط النقاط الواقعة على ذلك المستقيم.

٣. جميع الخطوط المستقيمة يجب أن تقع في الربع الأول لأن $X_j \geq 0$، وبخلافه يتم إمداد الخط ليصل إلى الربع الأول، إلا إذا كان قيد عدم السلبية يُشير إلى غير ذلك.

٤. المُضلع الناتج من تقاطع مناطق الحل لجميع المستقيمات يُمثل منطقة الحل المقبول.

٥. نُحدد نقطة أو نقاط مُتطرفة في منطقة الحل المقبول والتي تحقق القيمة العظمى أو الصغرى لدالة الهدف (تدعى طريقة نقاط الزوايا).

٦. نَرسم المستقيم المُمثل لدالة الهدف (خطوط الربح) باعتباره يبتدء من نقطة الأصل (عندما Z=0) وذلك كطريقة اضافية لتأكيد نقطة (أو نقاط) الحل الأمثل المُتطرفة.

مثال (٢-١٠): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية :

Max. $Z = 8\ X_1 + 6\ X_2$

Sub. to

$$4\ X_1 + 2\ X_2 \leq 60$$
$$2\ X_1 + 4\ X_2 \leq 48$$
$$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0$$

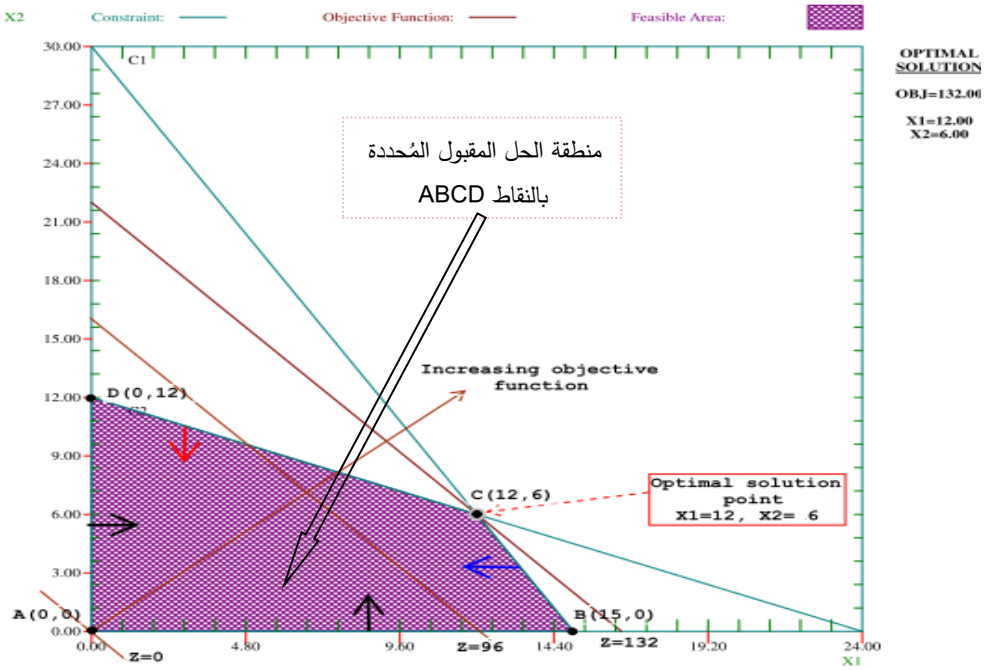
$4\ X_1 + 2\ X_2 = 60$ ...(1)

X_1	X_2	
0	30	*(0,30)*
15	0	*(15,0)*

$2\ X_1 + 4\ X_2 = 48$ ...(2)

X_1	X_2	
0	12	*(0,12)*
24	0	*(24,0)*

الحل: إن منطقة الحل المقبول تقع في الربع الأول لأن $X_1\ ,\ X_2 \geq 0$، يتم تحديد منطقة الحل المقبول والنقاط المُتطرفة على الرسم كما في الشكل التالي.



من الشكل أعلاه نُحدد نقاط الحل الأمثل بالاعتماد على النقاط المُتطرفة كما في الجدول الآتي:

Points	(X_1 , X_2)	$Z = 8X_1 + 6X_2$
A	(0,0)	0
B	(15,0)	120
C	(12,6)	132
D	(0,12)	72

Max. Z=132

أذن نقطة الحل الأمثل هي C حيثُ $X_2 = 6$, $X_1 = 12$, $Z = 132$ وإن منطقة الحل المقبول المحددة مُعرفة بالنقاط (ABCD).

أما لتحديد الحل الأمثل بالأعتماد على معادلة دالة الهدف Z فيتم ذلك بأفتراض قيم مختلفة لـ(Z) ونرسم دالة الهدف والتي تمتاز بأنها متوازية (وذلك بسبب ثبات قيم

معاملات المتغيرات وتغير قيم دالة الهدف مما يولد خطوط مستقيمة متوازية)، ونستمر حتى نصل إلى أعلى قيمة لدالة الهدف بشرط أن تقع ضمن حدود منطقة الحل المقبول السابق، وبالشكل الآتي:

Let Z = 0 ,

Let $Z=8X_1 + 6X_2=96$

X_1	X_2	
0	16	***(0,16)***
12	0	***(12,0)***

Let $Z=8X_1 + 6X_2= 132$

X_1	X_2	
0	22	***(0,22)***
16.5	0	***(16.5,0)***

بعد رسم دالة الهدف للقيم المُفترضه أعلاه، نُلاحظ أن أعلى نقطة تمر بها دالة الهدف هي النقطة (12,6) C وذلك يؤكد الحل الذي تم الحصول عليه بالأعتماد على النقاط.

مثال (٢-١١): أوجد الحل الأمثل لمثال (٢-٣):

١. بطريقة الرسم.

٢. بطريقة الرسم في حالة أفتراض أن دالة الهدف من نوع (.Max).

Min. $Z = 2 X_1 + 3 X_2$

Sub to

$X_1 + X_2 \geq 350$

$X_1 \geq 125$

$X_1 + X_2 \leq 600$

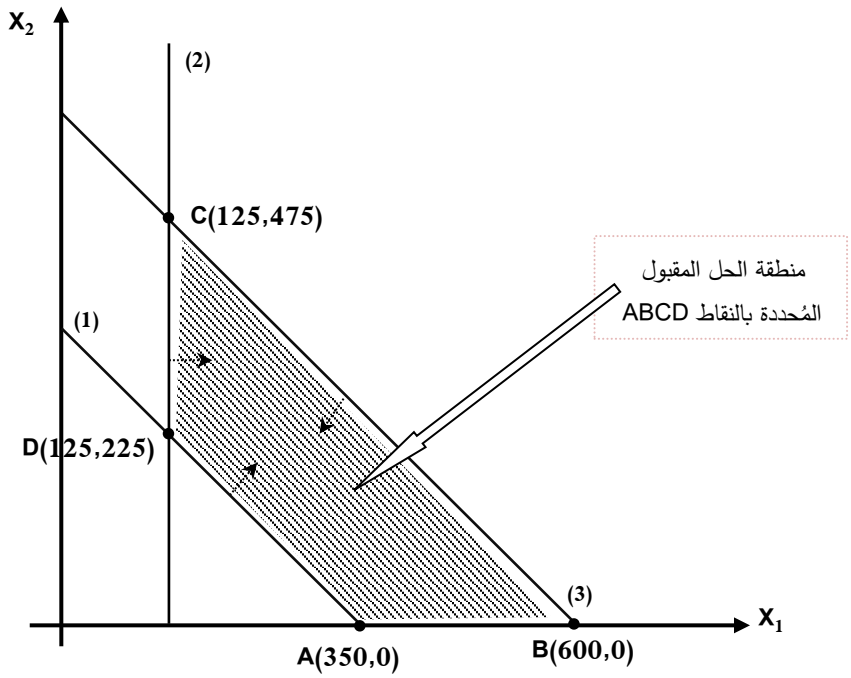
$X_1 , X_2 \geq 0$

١. إيجاد الحل الأمثل بطريقة الرسم:

$X_1 + X_2 = 350$ …(1) $X_1 = 125$ …(2) $X_1 + X_2 = 600$ …(3)

X_1	X_2	
0	350	→ (0,350)
350	0	→ (350,0)

X_1	X_2	
0	600	→ (0,600)
600	0	→ (600,0)



من الرسم أعلاه نجد أن منطقة الحل المقبول هي المنطقة المظللة والمحدده بالنقاط ABCD.

Points	(X_1 , X_2)	$Z = 2 X_1 + 3 X_2$
A	(350,0)	700
B	(600,0)	1200
C	(125,475)	1675
D	(125,225)	925

Min. Z=700

وحيثُ إن دالة الهدف هي تدنية التكاليف إلى أدنى حد، فإن النقطة A تحقق أقل كلفة ممكن، وأن $X_1 = 350$ و $X_2 = 0$ لنحصل على التكلفة الأقل وهو $Z = 700$.

٢. إيجاد الحل الأمثل بطريقة الرسم في حالة افتراض أن دالة الهدف من نوع (.Max):

بالرجوع إلى نتائج طريقة الرسم في الفرع (١)، وتحت افتراض أن دالة الهدف من نوع (.Max)، فإننا يُمكن الاستفادة من هذه النتائج واختيار أكبر قيمة لدالة الهدف وهي عند النقطة C حيث أن $X_1=125$ و $X_2=475$ لنحصل على الربح الأعظم وهو $Z = 1675$.

مثال (٢-١٢): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

Max. $Z = 5 X_1 + 2 X_2$

Sub. to

$X_1 + X_2 \leq 10$

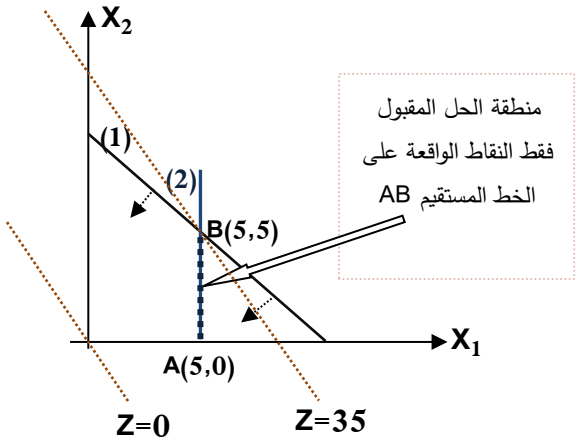
$X_1 = 5$

$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0$

$X_1 + X_2 = 10$ ...(1) $X_1 = 5$ ...(2)

X_1	X_2	
0	10	***(0,10)***
10	0	***(10,0)***

الحل: إن منطقة الحل المقبول تقع في الربع الأول لأن $X_1 , X_2 \geq 0$، ويتم تحديد منطقة الحل المقبول والنقاط المُتطرفة على الرسم كما في الشكل التالي، حيثُ نحدد نقاط الحل الأمثل بالأعتماد على النقاط المُتطرفة لذلك الشكل، ونُلاحظ أن منطقة الحل الأمثل هي فقط النقاط الواقعة على الخط المستقيم AB والتي تُمثل منطقة تقاطع قيود المسألة، وأن نقطة الحل الأمثل هي النقطة المتطرفة B حيثُ: $Z = 35 , X_1 = 5 , X_2 = 5$



Points	(X_1 , X_2)	$Z=5X_1+2X_2$
A	(5,0)	25
B	(5,5)	35

Max. Z=35

مثال (٢-١٣): أوجد الحل الأمثل بطريقة الرسم لمسألة البرمجة الخطية الآتية :

Min. $Z = 10\ X_1 + 25\ X_2$

Sub. to

$X_1 + X_2 \geq 50$

$X_1 \geq 20$

$X_2 \leq 40$

$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0$

$X_1 + X_2 = 50$ ...(1)

X_1	X_2	
0	50	***(0,50)***
50	0	***(50,0)***

$X_1 = 20$ ...(2)

$X_2 = 40$ ...(3)

الحل: إن منطقة الحل المقبول تقع في الربع الأول لأن $X_1 , X_2 \geq 0$، ويتم تحديد منطقة الحل المقبول والنقاط المُتطرفة على الرسم كما في الشكل التالي، حيثُ نُلاحظ أن النقطة A هي نقطة الحل الأمثل لأنها تملك أقل قيمة في منطقة الحل المقبول غير المُحددة X_1ABC وامتداد المستقيم الثالث والمفتوحة من اليمين، حيثُ $Z=500$, $X_1=50,X_2=0$، والحل مُفكك لأن قيمة أحد المتغيرات $X_2 = 0$، وعند رسم معادلة دالة الهدف لقيمة أكبر من $Z = 500$ نجد أنها تقع في المنطقة المفتوح غير المُحددة، أي أن $Z \cong \infty$ هي أكبر قيمة لـ Z لهذا فالحل هنا غير مُحدد.